# ММИ. Тождества. Добавка.

1. Докажите тождество: $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

2. Упростите выражение:$-1+3-5+7-9+\dots+(-1)^n(2n-1)$.

3. Упростите выражение: $(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})\dots(1-\dfrac{1}{n^2})$.

4. Упростите выражение: $\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\dots\dfrac{n^3-1}{n^3+1}$

5. **Серия «задач про Васю».** Найдите ошибку в следующих рассуждениях:
**(a)** «Утверждение». При любом натуральном $n$ числа $n$ и $n+1$ равны.
«Доказательство». Предположим, что утверждение верно для $n=k$, то есть $k=k+1$. Прибавляя к обеим частям этого равенства единицу, получаем, что $k+1=k+2$. Рассуждая так дальше, получаем, что все числа равны.

**(b)** «Утверждение». При разбиении прямоугольника на $n>2$ прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины.
«Доказательство». При $n=2$ утверждение верно. Предположим, что при разбиении прямоугольника на $k>2$ прямоугольников всегда найдутся два, у которых совпадают две вершины. Разделим какой-нибудь прямоугольник на два прямоугольника. Тогда эти у этих двух прямоугольников совпадают две вершины. Итак, мы получили, что данный прямоугольник разбит на $k+1$ прямоугольников среди которых есть два, у которых совпадают две вершины.

**(c)** «Утверждение». Любые n точек лежат на одной прямой.
«Доказательство». При $n=1$ это ясно. Предположим, что любые $k$ точек лежат на одной прямой и докажем, что любые $k+1$ точек лежат на одной прямой. Рассмотрим произвольные $k+1$ точек $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$. Отбросим последнюю точку и применим предположение индукции. Получим прямую $l$, на которой лежат точки $A_1, A_2, \dots, A_k$. Нам надо доказать, что и последняя точка $A_{k+1}$ лежит на этой прямой. Отбросим первую точку и применим предположение индукции к точкам $A_2, A_3, \dots, A_{k+1}$. Получим, что они все лежат на некоторой прямой $l_0$. Но прямые $l$ и $l_0$ совпадаают, так как обе они проходят через точки $A_2$ и $A_k$, а как известно, через дветочки можно провести только одну прямую. Поэтому все $k+1$ точек лежат на одной прямой.