
Что-то, что у вас уже было. Собираем мозги в кучку.

1. Докажите, что $4^n - 1$ делится на 3.
2. Докажите эквивалентность двух определений сравнения по модулю.
3. Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.
4. Найти остаток $3^{16} - 2^{55} \cdot 5^{15}$ от деления на 3.
5. Можно ли расставить по кругу 7 целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то расположенных трех подряд чисел была равна 1, каких-то трех подряд расположенных -2 , ..., каких-то трех подряд расположенных -7 ?
6. Камни лежат в трёх кучках: в одной 51 камень, в другой 49 камней, а в третьей 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
7. Докажите, что $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.
8. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.
9. Каких чисел больше: тех, которые не делятся на 5 или тех, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятерка?
10. Сколько существует 6-значных чисел, у которых каждая последующая цифра меньше предыдущей?