Вписанные углы II. Душевный листик.

Все задачи надо сдавать устно. Первый день сдачи задач — 2 мая. Последний день сдачи задач — 10 мая. Скорее всего будет организована промежуточная отслушка задач.

1. AH – высота остроугольного треугольника ABC, K и L – основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

2. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ, а вершина R – на стороне AB(точки A и P находятся в одной полуплоскости относительно CR). Докажите, что $AP \parallel BQ$.

3. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD – точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на биссектрису угла ABD, пересекает прямую AB в точке C_1; перпендикуляр, опущенный из вершины B на биссектрису угла ACD, пересекает прямую CD в точке B_1. Докажите, что $B_1C_1||AD$.

5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC + \angle ABD = 90°$. На диагонали BD отмечена точка E, причём $BE = AD$. Из неё на сторону AB опущен перпендикуляр EF. Докажите, что $CD + EF < AC$.

6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

7. AB — диаметр окружности ω. Прямая ℓ касается окружности ω в точке B. Точки C, D выбраны на ℓ таким образом, что B находится на отрезке CD. E, F — точки пересечения ω и прямых AC, AD соответственно, а G, H — точки пересечения ω и прямых CF, DE. Докажите, что $AH = AG$.

8. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

9. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $DE||AC$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP||EQ$. Лучи QA и

PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180^\circ$.

10. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины высот AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC. Найдите сумму углов $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$ и $\angle A_2C_1B_2$.

11. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q, лежащей внутри треугольника ACD. Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.

12. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках D и P. Точки A и B лежат на окружностях ω_1 и ω_2 соответственно, причем AB — общая касательная к этим окружностям, а D лежит внутри ABP. Прямая AD вторично пересекает окружность ω_2 в точке C, M — середина BC. Докажите, что $\angle DPM = \angle BDC$.

В листике суммарно 15 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.

3 — 5 плюсиков;
4 — 7 плюсиков;
5 — 9 плюсиков.

Последний день сдачи задач — 10 мая.