Вписанные углы II

Все задачи надо сдавать устно. Первый день сдачи задач — 2 мая. Последний день сдачи задач — 10 мая. Скорее всего будет организована промежуточная отслушка задач.

Концовка прошлого листика

1. Пусть дана окружность, и две её хорды AB и CD пересекаются в точке O внутри окружности (хорда — это отрезок, концы которого лежат на окружности). Докажите, что угол AOC (равный углу BOD) равен половине суммы дуг AC и BD .
2. Прямые, содержащие хорды AB и CD пересекаются в точке O вне окружности (считаем, что точки A, B, O и C, D, O располагаются в таком порядке на своих прямых). Докажите, что угол AOC (он же BOD) равен половине разности дуг AC и BD .
3. **Угол между хордой и касательной.** К описанной окружности треугольника ABC в точке A проведена касательная ℓ . Докажите, что угол ABC равен углу между AC и ℓ .
4. Пусть дан треугольник ABC , и в точке B построена касательная к описанной окружности треугольника ABC . Рассмотрим любую прямую, параллельную этой касательной, и отметим точки D и E пересечения с прямыми AB и BC соответственно. Докажите, что четыре точки A, C, D, E лежат на одной окружности.
5. В неравностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD . X — точка пересечения прямой BC с касательной к описанной окружности исходного треугольника, восстановленной в точке A . Докажите, что $AX = DX$.
6. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O . Известно, что описанная окружность треугольника AOB касается прямой BC . Докажите, что описанная окружность треугольника BOC касается прямой CD .
7. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M . Докажите, что касательная в точке M к описанной окружности треугольника ABM параллельна CD .
8. На окружности даны точки A, B, C, D в указанном порядке. M — середина дуги AB . Обозначим точки пересечения хорд MC и MD с хордой AB через E и K . Докажите, что $KECD$ — вписанный четырёхугольник.
9. Про выпуклый четырёхугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = CD$. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке M , K — точка пересечения

биссектрис углов A и D . Докажите, что точки A, M, K, D лежат на одной окружности.

Несколько новых задач

10. В треугольнике ABC проведена средняя линия KN (K — середина AB , N — середина BC). На отрезках KB и BN отмечены точки L и M соответственно так, что $ALMC$ — вписанный. Докажите, что $KLMN$ — вписанный.
11. AH — высота остроугольного треугольника ABC , K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC . Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.
12. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ , а вершина R — на стороне AB (точки A и P находятся в одной полуплоскости относительно CR). Докажите, что $AP \parallel BQ$.
13. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на стороне AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
14. В треугольнике ABC $AB > BC$, и на стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N . Докажите, что точки A, P, M, N лежат на одной окружности.
15. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проводится прямая, пересекающая вторично окружности в точках C и D , а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.

В листике суммарно 15 задач (включая пункты).

Количество полученных плюсов по этому листику конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.

3 — 9 плюсов;

4 — 11 плюсов;

5 — 13 плюсов.

Последний день сдачи задач — 10 мая.