

# Комбинаторика и алгебра

*Целое больше суммы его частей.*

Аристотель

1. Докажите тождество

(а)

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n;$$

(б)

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots;$$

(с)

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1};$$

(д)

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n;$$

(е)

$$F_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots,$$

где  $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  — числа Фибоначчи.

*Все тождества можно доказать через треугольник Паскаля, некоторые через бином Ньютона, некоторые комбинаторно. А ещё эти задачи у нас уже были. И они все пробиваются с помощью индукции.*

2. Вычислите сумму

(а)

$$C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 + \dots + C_n^n \cdot 2^n;$$

(б)

$$C_n^1 + 6 \cdot C_n^2 + 6 \cdot C_n^3;$$

(с)

$$C_n^1 + 14 \cdot C_n^2 + 36 \cdot C_n^3 + 24 \cdot C_n^4;$$

(д)

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots;$$

(е)

$$C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + 4^2 C_n^4 + \dots$$

*Для начала я рекомендую в каждом пункте «угадать» ответ. Это сделать несложно, достаточно подставлять маленькие  $n$ .*

3. Найдите число нулей, на которое оканчивается число  $11^{100} - 1$ .

4. Докажите тождество

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = C_{k+1}^2 + 2(C_k^2 + C_{k-1}^2 + \dots + C_2^2),$$

с помощью кубиков. А именно, надо понять, что  $C_n^2$  — количество кубиков в лесенке, где высота первой ступеньки равна 1, высота второй ступеньки равна 2, ..., высота последней ступеньки равна  $n - 1$ .

5. Найдите  $m$  и  $n$ , если известно, что

$$C_{n+1}^{m+1} : C_{n+1}^m : C_{n+1}^{m-1} = 5 : 5 : 3.$$

6. Докажите, что каждое число  $C$  в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число  $C$  (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

7. На рисунке изображен **треугольник Лейбница**. Каждое число равняется сумме двух чисел под ним. Докажите, что в строке номер  $n$  на месте номер  $k$  стоит число  $\frac{1}{(n+1)C_n^k}$ .

Как и в треугольнике Паскаля нумерация строк начинается с 0, внутри каждой строки нумерация элементов начинается с 0. Вероятно, это связано с тем, что Паскаль — француз, а во Франции натуральные числа начинаются с нуля.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\
 \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

В этом листике суммарно 15 задач (включая пункты). Количество полученных плюсов по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 7 плюсов;

4 — 10 плюсов;

5 — 13 плюсов.

Последний день сдачи задач — 25 апреля апреля.