Турниры

В турнире лев старый был менее крепким,
Чем хитрый, отчаянный лев молодой.

Нострадамус

Турнир — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно одно ориентированное ребро. Он называется турниром, поскольку моделирует однокруговой турнир, в котором нет ничьих, то есть турнир, в котором каждая команда или игрок играют с каждым.

Докажем некоторые свойства турниров.

1. Докажите, что найдётся вершина, из которой можно по рёбрам добраться до любой другой. *Рассмотрите вершину с наибольшей исходящей степенью.*

2. Гамильтонов путь — это путь, который проходит через каждую вершину ровно один раз. Докажите, что в любом турнире есть гамильтонов путь. *Рассмотрите путь, имеющий максимальную длину.*

3. По аналогии с путём определяется гамильтонов цикл. Ориентированный граф называется сильно связным, если в нём существует (ориентированный) путь из любой вершины в любую другую. Докажите, что в сильно связном турнире существует гамильтонов цикл. *Рассмотрите цикл, имеющий максимальную длину.*

4. Прошёл однокруговой турнир. Мы хотим раздать места командам так, чтобы это выглядело максимально реалистично, чтобы никакая команда не выиграла у того, у кого место лучше, и не проиграла тому, у кого место хуже. Докажите, что это можно сделать, если в турнире нет ориентированных циклов.

Задачи

5. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Доказать, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.

6. 12 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Две команды одержали ровно по 7 побед. Доказать, что найдутся такие команды A, B, C, что A выиграла у B, B выиграла у C, а C — у A.

7. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдется цикл длины 3.

8. В одном государстве 100 городов и каждый соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что можно поменять направление движения не более чем на одной дороге так, чтобы от каждого города можно было доехать до любого другого.

9. Докажите, что в игру Камень-Ножницы-Бумага можно добавить ещё 10 других жестов руками так, чтобы все жесты имели равновероятную победу.

10. Какое наибольшее число вершин с 8 победами может быть в турнире на 13 команд?

11. Какое наибольшее количество циклов длины три может быть в турнирном графе на 11 вершин, если исходящая степень каждой вершины равна 5?

12. Назовём *царём* вершину в графе, расстояние от которой до любой другой вершины не превосходит двух.

(a) Докажите, что в любом турнире найдётся царь.

(b) Докажите, что если в турнире ровно один царь, то он победил всех других участников.

(c) Докажите, что в турнире не может быть ровно двух царей.

13. **(a)** Докажите, что в сильно связном турнире с n вершинами для любого k ($3 \leqslant k \leqslant n$) и любой вершины существует простой цикл длины k, проходящий через эту вершину.

(b) Докажите, что в сильно связном турнире хотя бы $n+1-k$ простых циклов длины k.

(c) Докажите, что существует граф, в котором для любого k ($3 \leqslant k \leqslant n$) существует ровно $n+1-k$ простых циклов длины k.

Таким образом, решается вопрос о минимальности количества циклов в сильно связном турнире. Вопрос о максимальном числе циклов открыт.

В этом листике суммарно 17 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 8 плюсиков;

4 — 11 плюсиков;

5 — 14 плюсиков.

Последний день сдачи задач — 11 апреля.