Теорема Эйлера

Именно математика даёт надёжнейшие правила: тому кто им следует — тому не опасен обман чувств.

Леонард Эйлер

1. **(a)** Пусть a не делится на p. Докажите, что среди чисел

$$1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$$

все ненулевые остатки при делении на p содержатся по одному разу.
(b) Из того, что произведение остатков в одинаковых наборах дают одинаковые остатки, выведите малую теорему Ферма.

Теорема Эйлера. Пусть n — натуральное число, a — взаимно простое с n.

$$a^{\varphi(n)} - 1 \,\vdots\, n.$$

Где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, количество чисел взаимно простых с n и не больших n.

2. **(a)** Докажите, что если умножить все взаимно простые с n остатки на a (которое с n тоже взаимно просто), то получатся все взаимно простые с n остатки по одному разу.
(b) Проведите рассуждения, аналогичные доказательству малой теоремы Ферма и докажите теорему Эйлера.

3. Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

4. Найдите остатки от деления:
(a) 19^{10} на 6; **(b)** 19^{14} на 70; **(c)** 17^9 на 48; **(d)** $14^{14^{14}}$ на 100.

5. Найдите все целые числа a, для которых число $a^{10}+1$ делится на 10.

6. Докажите, что $5^{6^7} - 1$ делится на 2016.

7. Докажите, что $n^{561} - n$ делится на 561.

8. Докажите, что $n^{84} - n^4$ делится на 20400 для любого натурального n.

9. При помощи теоремы Эйлера найдите число x, удовлетворяющее сравнению

$$ax + b \equiv 0 \mod m,$$

где $(a, m) = 1$.

10. **(a)** Докажите, что при любом нечётном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.
(b) Докажите, что $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$ для всех чётных n.

11. Докажите, что если у числа n есть два различных нечетных простых делителя, то для числа a взаимно простого с n верно, что $a^{\varphi(n)/2} - 1$ делится на n.

12. Докажите, что $2^{3^k} + 1$ делится на 3^{k+1}.

13. Пусть $a > 1$, $(a, b) = 1$. Докажите, что найдется такое n, что

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n \,\vdots\, b.$$

14. Найдите все простые p и натуральные n такие, что $7^{p^n} + 1$ делится на p^n.

15. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число K такое, что сумма цифр K равна n и K делится на n.

В этих двух листиках суммарно 21 задача (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
3 — 13 плюсиков;
4 — 16 плюсиков;
5 — 18 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 28 марта.