Отрезки касательных

Больше всего люди интересуются тем, что их совершенно не касается.

Джордж Бернард Шоу

1. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, AC, BC в точках C_1, B_1, A_1 соответственно. Известно, что $AB = 13$, $AC = 17$, $BC = 8$. Чему равна длина отрезка AB_1? CA_1? BC_1?

2. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1, а продолжений сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Известно, что $AB = 21$, $AC = 18$, $BC = 10$. Чему равна длина отрезка AB_1? CA_1? AC_1? BC_1?

3. Пусть вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, AC и AB в точках K, L, и M соответственно. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке N, а продолжений сторон AC и AB — в точках P и Q соответственно. Докажите, что
(a) $AM = AL = p - a$, $BM = BK = p - b$, $CK = CL = p - c$;
(b) $AP = AQ = p$, $BN = p - c$, $CN = p - b$,
где a, b, c — длины сторон BC, AC и AB соответственно, $p = (a + b + c)/2$.

4. **Критерий описанного четырехугольника.** В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

В обратную сторону эта теорема доказывается рассуждениями от противного.

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D, для которой выполнено равенство $AB + CD = BC + DA$. Докажите, что вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке D.

6. **Критерий описанного четырехугольника.** Пусть BD — внешняя диагональ невыпуклого четырехугольника $ABCD$. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC — в точке Q. Тогда в четырехугольник $APCQ$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда
(a) суммы противоположных сторон четырехугольника $ABCD$ равны;
(b) $PB + PD = QB + QD$.

7. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 10$ и $AC = 13$. Чему должна быть равна длина стороны BC, чтобы точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC делили её на три равных отрезка?

8. Даны две окружности, радиусы (r и R) и расстояние между центрами (d). Найти длину общей внешней касательной и общей внутренней касательной.

9. **(a)** Пусть D — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC. Докажите, что вписанные окружности треугольников ABD и DBC касаются.
(b) Пусть D — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со сто-

роной AC. Докажите, что вневписанные окружности треугольников ABD и BCD, касающиеся отрезка AC, касаются.

10. Докажите, что если в четырехугольнике $ABCD$ окружности, вписанные в треугольники ACB и ACD, касаются диагонали AC в одной точке, то окружности, вписанные в треугольники ABD и CBD, касаются диагонали BD в одной точке.

11. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности. К ним проведена общая внешняя касательная (отличная от AC), пересекающая BD в точке K. Докажите, что длина отрезка BK не зависит от выбора точки D.

12. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая l, лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB, продолжения стороны BC за точку B и прямой l в точке P. Окружность ω_C касается отрезка AC, продолжения стороны BC за точку C и прямой l в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой l.

13. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AD и AB в точках M и N. Докажите, что точки пересечения отрезка MN с BC и CD лежат на вписанной окружности треугольника BCD.

14. Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABD и BCD касаются диагонали BD в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BAC и ACD касаются диагонали AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что если все точки X, Y, Z, T различны, то они являются вершинами прямоугольника.

15. Докажите, что отрезок внутренней касательной к двум непересекающимся окружностям, заключенный между двумя внешними касательными, равен по длине внешней касательной. *Надо не забывать про случай параллельных касательных.*

16. Даны непересекающиеся окружности S_1 и S_2 и их общие внешние касательные l_1 и l_2. На l_1 между точками касания отметили точку A, а на l_2 — точки B и C так, что AB и AC — касательные к S_1 и S_2. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей S_1 и S_2, а K — точка касания вневписаной окружности треугольника ABC со стороной BC. Докажите, что середина отрезка O_1O_2 равноудалена от точек A и K.

В листике суммарно 19 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по геометрии по следующему принципу.
3 — 12 плюсиков;
4 — 15 плюсиков;
5 — 17 плюсиков.
Первые 7 задач (со всеми пунктами) будут разобраны 11 марта. Листик будет окончательно разобран 18 марта.