Инвариант

Да здравствует мыслительный процесс!

Доктор Хаус

Определение. Инвараинт или инвариантность — термин, обозначающий нечто неизменяемое, некоторое постоянное свойство процесса.

1. По кругу лежат 12 монет: 1 монета лежит орлом вверх, остальные — решкой вверх. За один ход разрешается перевернуть k подряд идущих монет. Можно ли получить ситуацию, когда ровно одна монета лежит орлом вверх и эта монета соседствует с монетой, которая первоначально лежала орлом вверх, если **(a)** $k = 4$; **(b)** $k = 3$?

2. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?

3. У Змея Горыныча 12345 голов. Илья Муромец может совершать следующие действия: отрубить 7 голов — но тогда у Змея Горыныча сразу вырастет 4 новых; либо отрубить 2 головы — тогда у Змея Горыныча вырастет 8 новых. Сможет ли Илья Муромец отрубить все головы?

4. **(a)** Дан клетчатый квадрат 4×4, в которой одна угловая клетка белая, а все остальные черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый?
(b) Условие то же, что и в предыдущей задаче, но изначально в белый покрашены четыре клетки на одной из диагоналей. Можно ли перекрасить все клетки квадрата в белый?
(c) Условие то же, что и в предыдущей задаче, но клетки раскрашены так, что в каждом квадратике 2×2 четное число белых клеток. Можно ли перекрасить все клетки квадрата в белый?

5. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно перезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

6. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

7. Есть три кучки камней: в первой — 51 камень, во второй — 49 камней, в третьей — 5 камней. За один ход разрешается либо соединить две кучки, либо разделить кучку на две равных. Можно ли получить 105 кучек по одному камню?

8. В первом сундуке лежит 111 монет, во втором — 222 монеты, в третьем — 333 монеты, а в четвертом — 444 монеты. Иван Дурак может взять из любого сундука 3 монеты и разложить по одной монете в оставшиеся сундуки. Эту операцию он может повторить сколь угодно много раз. В любой момент Иван сможет забрать все монеты из одного сундука. Какое наибольшее количество монет сможет забрать Иван Дурак?

9. На доске написаны три натуральных числа. Петя записывает на бумажке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Пусть первоначально на доске написаны числа 17, 20, 25. Найдите сумму чисел на Петиной бумажке в момент, когда одно из чисел на доске стало равно нулю.

10. В языке Древнего Племени алфавит состоит всего из двух букв: «М» и «О». Два слова являются синонимами, если одно из другого можно получить при помощи исключения или добавления буквосочетаний «МО» и «ООММ», повторяемых в любом порядке и любом количестве. Являются ли синонимами в языке Древнего Племени слова «ОММ» и «МОО»?

11. На прямой стоят две фишки, слева — красная, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд в любом месте прямой и удаление любых двух соседних одноцветных фишек. Можно ли за конечное число операций оставить на прямой ровно две фишки: красную справа, а синюю — слева?

12. В трех вершинах квадрата сидит по кузнечику. За один ход любой кузнечик допрыгивает до любого другого кузнечика и сразу же делает еще один такой же прыжок в том же направлении. Могут ли кузнечики через несколько прыжком собраться в других трех вершинах того же квадрата?

13. Изначально на доску записывают число 1, а дальше берётся последнее выписанное n и если оно чётное, то дописывается число $\frac{n}{2}$, а если нечётное, то $\frac{n+1001}{2}$. Сколько различных чисел будет выписано на доску.

В листике суммарно 16 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
3 — 10 плюсиков;
4 — 12 плюсиков;
5 — 14 плюсиков.
Задачи принимаются вплоть до их разбора 4 февраля.