Мультипликативные функции

– А почему я должна ходить в школу?

– Чтобы научиться читать, писать, выучить таблицу умножения.

– Спасибо, я прекрасно обхожусь без вашей этой.. таблицы уважения.

Пепши Длинный Чулок

Определение. Будем называть функцию $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ мультипликативной, если $f(n \cdot k) = f(n) \cdot f(k)$ для взаимно простых n и k .

- Рассмотрим функцию $C(n)$, равную количеству делителей числа n .
 - Вычислите $C(8), C(15), C(120)$. Удостоверьтесь, что $C(8) \cdot C(15) = C(120)$.
 - Чему равно $C(p^\alpha)$?
 - Докажите, что $C(n)$ — мультипликативная функция.
 - Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Выведите формулу для $C(n)$.
- Докажите, что $C(n) < 2\sqrt{n}$.
- Докажите, что $\sqrt{n^{C(n)}}$ равно произведению всех делителей числа n .
- Рассмотрим функцию $S(n)$, равную сумме всех делителей числа n .
 - Вычислите $S(8), S(15), S(120)$. Удостоверьтесь, что $S(8) \cdot S(15) = S(120)$.
 - Чему равно $S(p^\alpha)$? Выведите формулу без многоточия.
 - Докажите, что $S(n)$ — мультипликативная функция.
 - Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Выведите формулу для $S(n)$.
- Натуральное число n таково, что сумма всех его делителей равна D , а сумма всех чисел, обратных его делителям, равна d . Найдите число n .

Определение. Функция Эйлера $\varphi(n)$ — функция, равная количеству натуральных чисел, меньших либо равных n и взаимно простых с ним.

Пример. Несложно вычислить, что $\varphi(15) = 8$. Действительно, среди чисел от 1 до 15, только 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 и 14 взаимно просты с 15.

6. (а) Чему равно $\varphi(p)$? А $\varphi(p^\alpha)$? (p — простое число)
(б) В таблицу $a \times b$ (a строк, b столбцов) выписаны все числа от 1 до ab подряд (в начале заполняется первая строка, потом вторая и т.д.) для

$$(a = 5; b = 7); \quad (a = 8; b = 5).$$

Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b ? Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a ?

- (с) Какими будут ответы на эти вопросы для произвольных a и b таких, что $\text{НОД}(a, b) = 1$?
(д) Докажите, что $\varphi(n)$ — мультипликативная функция.
(е) Как вычислить $\varphi(n)$ для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$?
7. Докажите, что любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей.

В листике суммарно 17 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсики по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

3 — 9 плюсики;

4 — 12 плюсики;

5 — 15 плюсики.

Задачи принимаются вплоть до их разбора 5 февраля.