Неравенства о средних

– Эх... куда подевалось старое доброе классовое неравенство?
– Эта мода на демократию скоро пройдет!

Король Джулиан

Неравенства о средних ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

1. Найдите наименьшее значение выражения при положительных x и y
(a) $3x+\frac{1}{4x}$; **(b)** $xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; **(c*)** $x^2+\frac{1}{x}$.

2. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\ldots+a_n) \geqslant n^2.$$

3. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geqslant \frac{ab+bc+ac}{3}.$$

4. Докажите неравенство для положительных значений переменных

(a) $$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)};$$

(b) $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

5. Даны вещественные $x_0 > x_1 > \ldots > x_n$. Докажите, что

$$x_0+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant x_n+2n.$$

6. Докажите, что для положительных a выполнено неравенство:

$$a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a} \geqslant 16.$$

7. Докажите, что выполнено неравенство:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} < 12.$$

8. Докажите, что для положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{d}}+\sqrt{\frac{c+d}{a}}+\sqrt{\frac{d+a}{b}} \geqslant 4\sqrt{2}.$$

9. Найдите минимальное значение выражения

$$\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+(1-x_1)^2}.$$

10. Положительные x, y, z таковы, что $x+y+z=xyz$.
Найдите минимум $xy+yz+zx$.

11. Докажите, что для положительных чисел a, b, c таких что, $a+b+c=1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geqslant \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

В листике суммарно 14 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику ПРИ ЖЕЛАНИИ конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
4 — 9 плюсиков;
5 — 11 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 14 декабря (суббота).