

Неравенства. Начало.

– Эх... куда подевалось старое
доброе классовое неравенство?
– Эта мода на демократию
скоро пройдет!

Король Джулиан

Пусть $a > 0$, $b > 0$. Тогда справедливы **неравенства между средними**:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причём эти неравенства обращаются в равенства в том и только в том случае, когда $a = b$. Четыре выписанные величины называются соответственно *средним гармоническим*, *средним геометрическим*, *средним арифметическим* и *средним квадратическим* чисел a и b .

Примеры, которые будут разбираться у доски.

1. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Когда достигается равенство?
2. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.
3. Докажите методом подстановки, что $4c^6 + a^2b^4 \geq 4ab^2c^3$.
4. Докажите с помощью суммирования известных неравенство, что

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$$

Стоит свернуть полный квадрат

1. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим.
2. Какое минимальное значение может принимать выражение $a + \frac{1}{a}$ при положительных a ?
3. Пусть $x > 1$. Что больше: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ или $2\sqrt{x}$?

Подстановка в известные неравенства

4. Докажите неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим.
5. При каких x дробь $(81 + 16x^4)/x^2$ принимает наименьшее значение?

Суммирование известных неравенств

6. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

7. Докажите неравенство для положительных значений переменных

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Разные задачи

8. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше четырех.
9. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geq 1/128$.
10. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $xy + yz + xz \geq 12$, то $x + y + z \geq 6$.
11. Решите уравнение $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

В листике суммарно 11 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсики по этому листику ПРИ ЖЕЛАНИИ
конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.

4 — 6 плюсики;

5 — 8 плюсики.

Последний день сдачи задач — 30 ноября (суббота).