Вспоминаем индукцию

– Дедукция доказывает обратное.
– Кто-кто? — обрадовался Сенька. — Я Дедукции вашей в глаза не видывал. Врёт она всё, стерва!

Эраст Фандорин

Алгебра

Докажите с помощью индукции, что выполнены следующие тождества

1.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3.

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

4.

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

5. Пусть x — такое, что $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — целое для любого натурального n.

Теория чисел

Докажите с помощью индукции, что

6. $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

7. $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ делится на 19.

8. все числа 10017, 100117, 1001117, …делятся на 53.

9. $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}.

10. $3^{2^n} - 1$ делится на 2^{n+2}, но не делится на 2^{n+3}.

11. Числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма. Докажите, что десятичная запись числа F_n при $n \geqslant 2$ оканчивается цифрой 7.

Комбинаторика

12. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.

13. На сколько частей делят плоскость n прямых, среди которых нет параллельных, и никакие три не пересекаются в одной точке?

14. Плоскость поделена на области несколькими прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние области были раскрашены в различные цвета.

15. Докажите, что если клетчатая доска $n \times n$ покрашена в 4 цвета так, что любой квадрат 2×2 содержит все четыре цвета, то: если n — чётно, то в углах квадрата стоят разные цвета; если n — нечётно, то клетки в углах раскрашены не более, чем в 2 цвета.

16. В выпуклом многоугольнике некоторые стороны и диагонали окрашены в красный цвет так, что никакие две красные диагонали не пересекаются внутри многоугольника, а любые две вершины многоугольника соединены ломаной из красных отрезков. Докажите, что сумма длин всех красных отрезков больше полупериметра многоугольника.

17. Есть два квадрата со стороной $25 \cdot 2^n$. В одном Василий Иванович отмечает одну клетку. Петька должен разрезать свой квадрат на части так, что:

- среди них есть квадратик со стороной 1;
- какую бы клетку Василий Иванович не отметил бы, Петька сможет закрыть своими фигурками все клетки квадрата Чапаева, кроме отмеченной.

Докажите, что Петьке достаточно разбить квадрат на $6 + n$ деталей.

В листике суммарно 17 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсиков по этому листику конвертируются в оценку по алгебре по следующему принципу.
3 — 10 плюсиков;
4 — 13 плюсиков;
5 — 16 плюсиков.
Последний день сдачи задач — 2 ноября (суббота).