

Ориентированные графы

– Ты заблудишься.
– Уверенней надо быть!
– Я уверена, что ты там заблудишься.

Из мультфильма
«Головоломка»

1. Дима, приехав из другой страны, рассказал, что там есть несколько озёр, соединённых между собой реками. Из каждого озера вытекают четыре реки, и в каждое озеро впадают три реки. При этом 10 рек впадает в море. Сколько озёр в стране, если никакая река не вытекает из моря?
2. На сторонах некоторого многоугольника расставлены стрелки. Докажите, что число вершин, в которые входят две стрелки, равно числу вершин, из которых выходят две стрелки.
3. В ориентированном графе 200 вершин, причём из каждой исходит ровно одно ребро и входит ровно одно ребро. Докажите, что можно провести не более 100 новых ребер так, чтобы граф стал сильно связным (то есть из каждой вершины можно было бы попасть по стрелкам в любую другую).
4. В некоторой стране есть столица и ещё 100 городов. Некоторые города (в том числе и столица) соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого нестоличного города выходит 20 дорог, и в каждый такой город входит 21 дорога. Докажите, что в столицу нельзя проехать ни из одного города.
5. Футбольный клуб «Амкар» состоит из 48 игроков. В течение 3 месяцев тренировок каждый игрок сфолил на другом игроке, причём на каждом игроке сфолили ровно один раз. Кроме этого, для любых трёх футболистов можно указать четвертого, сфолившего на одном из них. Докажите, что тренер может выгнать из клуба не более 8 игроков, а остальных разбить пополам на основной состав и дублирующий, чтобы ни один футболист не попал в одну команду со своим обидчиком.
6. В некотором государстве 101 город.
 - (а) Каждый город соединен с каждым из остальных дорогой с односторонним движением, причём в каждый город входит 50 дорог и из каждого города выходит 50 дорог. Докажите, что из каждого города можно доехать в любой другой, проехав не более чем по двум дорогам.
 - (б) Некоторые города соединены дорогами с односторонним движением, причём в каждый город входит 40 дорог и из каждого города выходит 40 дорог. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, проехав не более чем по трём дорогам.