

Остатки

Я мог бы провести остаток своей жизни за чтением, просто удовлетворяя свое любопытство.

Малькольм Икс

1. Число a даёт остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 5. Какой остаток может давать число a при делении на 15? на 30?
2. Натуральное число a таково, что $a + 2$ делится на 5. Докажите, что $7a + 4$ также делится на 5.
3. Нарисуйте таблицу умножения остатков при делении на:
 - (a) 3;
 - (b) 4;
 - (c) 5.

Свойства остатков:

Если при делении M_1 на N получили остаток r_1 , а при делении M_2 на N получили остаток r_2 , то:

При делении $M_1 + M_2$ на N получится такой же остаток, как и при делении $r_1 + r_2$ на N ;

При делении $M_1 \cdot M_2$ на N получится такой же остаток, как и при делении $r_1 \cdot r_2$ на N .

4. Найдите остаток от деления:
 - (a) $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 2021^3$ на 7
 - (b) $2019 + 2020^2 + 2021^3$ на 8.
 - (c) 267^{2018} на 8.

Решаем вместе: Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом n .

5. Докажите, что
 - (a) $n^5 + 4n$ делится на 5 при любом натуральном n ;
 - (b) $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n ;
 - (c) $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n ;
 - (d) $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечетном n ;
 - (e) $p^2 - 1$ делится на 24 при любом простом $p > 3$.
 - (f) $p^2 - q^2$ делится на 24, если p, q простые, большие 3.
6. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что одно из них делится на 3.