

## Остатки

Я мог бы провести остаток своей жизни за чтением, просто удовлетворяя свое любопытство.

Малькольм Икс

1. Число  $a$  даёт остаток 2 при делении на 3 и остаток 3 при делении на 5. Какой остаток может давать число  $a$  при делении на 15? на 30?
2. Натуральное число  $a$  таково, что  $a + 2$  делится на 5. Докажите, что  $7a + 4$  также делится на 5.
3. Нарисуйте таблицу умножения остатков при делении на:
  - (a) 3;
  - (b) 4;
  - (c) 5.

### Свойства остатков:

Если при делении  $M_1$  на  $N$  получили остаток  $r_1$ , а при делении  $M_2$  на  $N$  получили остаток  $r_2$ , то:

При делении  $M_1 + M_2$  на  $N$  получится такой же остаток, как и при делении  $r_1 + r_2$  на  $N$ ;

При делении  $M_1 \cdot M_2$  на  $N$  получится такой же остаток, как и при делении  $r_1 \cdot r_2$  на  $N$ .

4. Найдите остаток от деления:
  - (a)  $2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 2021^3$  на 7
  - (b)  $2019 + 2020^2 + 2021^3$  на 8.
  - (c)  $267^{2018}$  на 8.

*Решаем вместе:* Докажите, что  $n^3 + 2n$  делится на 3 при любом  $n$ .

5. Докажите, что
  - (a)  $n^5 + 4n$  делится на 5 при любом натуральном  $n$ ;
  - (b)  $n^2 + 1$  не делится на 3 ни при каком натуральном  $n$ ;
  - (c)  $n^3 + 2$  не делится на 9 ни при каком натуральном  $n$ ;
  - (d)  $n^3 - n$  делится на 24 при любом нечетном  $n$ ;
  - (e)  $p^2 - 1$  делится на 24 при любом простом  $p > 3$ .
  - (f)  $p^2 - q^2$  делится на 24, если  $p, q$  простые, большие 3.
6. Числа  $x, y, z$  таковы, что  $x^2 + y^2 = z^2$ . Докажите, что одно из них делится на 3.