

Разнойбой

1. В классе 20 человек. Из них все, кроме Пети дружат ровно с 5 одноклассниками. Может ли Петя ни с кем не дружить?
2. 10 школьников решали 10 задач. Выяснилось, что каждый школьник решил ровно две задачи, и каждую задачу решило два школьника. Докажите, что можно так организовать рассказ решений, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач, и при этом все задачи были бы рассказаны.
3. В графе часть вершин покрашены в синий цвет, а остальные в красный. При чем синие соединены только с красными и наоборот. Докажите, что сумма степеней синих вершин равна сумме степеней красных.
4. Сколько существует девятизначных чисел, у которых сумма **(а)** последних двух; **(б)** всех; цифр четна?
5. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску двух королей так, чтобы они не били друг друга?
6. Сократите дробь: $\frac{5840383}{34173679}$.
7. Найдите НОД чисел $111\dots 1$ (51 единица) и $111\dots 1$ (81 единица).
8. Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка:
(а) в любом квадратике 2×2 ?
(б) в любом уголке из трёх клеточек?
9. На старт «Весёлого забега» на 3000м выходит команда из трёх математиков. Им выдается один одноместный самокат. Дорожка прямая, стартуют все одновременно, а в зачёт идет время последнего пришедшего на финиш. Каково минимальное возможное время прохождения дистанции, если бегают все трое со скоростью 125 м/мин, а на самокате ездят со скоростью 250 м/мин?