

## Алгоритм Евклида

1. Хромой кузнечик прыгает по прямой, причем вправо он может прыгать только на 15 см, а влево только на 21 см. **(а)** Сможет ли он оказаться на 3 см левее начальной позиции? Если да, то как ему прыгать? **(б)** А если на 2 см правее? **(с)** В каких точках прямой он вообще может оказаться, прыгая по правилам?
2. От прямоугольника  $1365 \times 165$  начали отрезать квадраты, причем сторона квадрата каждый раз равна меньшей стороне прямоугольника, и после отрезания каждый раз остается снова прямоугольник. В конце концов остался квадрат. Чему равна его сторона?

Будем использовать следующие обозначения:  $\text{НОД}(a, b) = (a, b)$ ,  $\text{НОК}(a, b) = [a, b]$ .

3. Пусть есть натуральные числа  $a \geq b$  и  $(a, b) = r$ .
  - (а)** Докажите, что если большее из чисел заменить на их разность, то НОД не поменяется, то есть  $(a - b, b) = (a, b) = r$ .
  - (б)** Докажите, что  $(a - b \cdot k, b) = (a, b) = r$ , где  $k$  - целое.
  - (с)** Докажите, что если  $a \div b$ , то  $(a, b) = b$ .

**Алгоритм Евклида:** для того, чтобы найти НОД двух чисел  $a \geq b$ , необходимо выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$$

...

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n + 0$$

На каждом шаге большее число заменяется на остаток от деления на меньшее. Так продолжается, пока очередной остаток не окажется нулевым ( $r_{n+1} = 0$ ).

4. Пользуясь результатами задачи №3, докажите, что в алгоритме  $r_n = (a, b)$ .
5. Найдите алгоритмом Евклида **(а)** (1365, 165); **(б)** (12751, 10537).
6. Докажите, что  $r_1, r_2, \dots, r_n$  можно представить в виде  $a \cdot m + b \cdot k$ , где  $m$  и  $k$  — целые.
7. Найдите какие-нибудь целые  $x$  и  $y$  для которых:  $998x + 546y = 2$ .
8. Докажите, что если  $a$  и  $b$  взаимно просты, то уравнение  $ax + by = 1$  имеет решение в целых числах.