

Графы. Рукопожатия

Мой граф таинственный,
заморозили вы меня
И в вашей власти плоть и кровь
моя!

Король и Шут

Определение. Степенью вершины графа называется число ребер, выходящее из этой вершины.

Лемма. Сумма степеней вершин в графе равна удвоенному числу ребер.

- (а) Кот Васька поймал 6 марсианских мышек (у марсианских мышек по три хвоста) и связал их хвостами так, что свободных хвостов не осталось. Сколько узелков ему пришлось завязать?

(б) Васька поймал ещё одну мышку и решил, развязав некоторые из узелков, связать эту мышку со всеми остальными. Сможет ли он это сделать так, чтобы по-прежнему не было свободных хвостов?
- Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит три дороги, быть ровно 100 дорог?
- Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
- (Лемма о рукопожатиях)** (а) Докажите, что количество вершин графа с нечетными степенями четно.

(б) Докажите, что количество человек на Земле, сделавших за свою жизнь нечетное количество рукопожатий, четно.
- На занятие кружка пришли 20 школьников, среди них отличник Егор. Руководитель кружка спросил у каждого из них, кроме Егора, сколько у них знакомых среди остальных пришедших. В ответ прозвучали только числа 5 и 7. Докажите, что Егор с кем-нибудь знаком.
- В классе 30 человек. Может ли быть так, что у 9 из них по 3 друга (в этом классе), у 11 – по 4, а у 10 – по 5 друзей?
- Может ли случиться, что в компании из 11 девочек и 10 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики – с одним и тем же числом девочек?
- В неизвестной стране из города Столичный выходит 21 дорога, а из города Дальний – ровно одна. Из остальных городов выходит по 20 дорог. Докажите, что из города Дальний можно попасть в Столичный.