

Чередование и чётность

1. По кругу расположены 9 шестеренок так, что первая шестеренка сцеплена со второй, вторая – с третьей, . . . , восьмая – с девятой, девятая – с первой. Миша крутанул первую шестеренку по часовой стрелке. Что произошло? Почему?
2. На доске 2019×2019 расставлено 2019 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.
3. Можно ли на чашечных весах расположить несколько шести- и восьмифунтовых гирь и одну 17-фунтовую так, чтобы весы оказались в равновесии?
4. Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 17-тизвенной ломаной, пересекать все ее звенья?
5. Докажите, что число способов расставить на доске 8 ферзей так, чтобы они не били друг друга – четно.
6. Парламент состоит из двух равных по численности палат. На совместном заседании присутствовали все, и никто не воздержался при голосовании. Когда было объявлено, что некоторое решение было принято большинством в 23 голоса, оппозиция закричала "Это обман!". Почему?
7. Может ли шахматный конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?
8. В разные моменты времени из пунктов А и В выехали навстречу друг другу велосипедист и мотоциклист. Встретившись в точке С, они тотчас развернулись и поехали обратно. Доехав до своих пунктов, они опять развернулись и поехали навстречу друг другу. На этот раз они встретились в точке D и, развернувшись, вновь поехали к своим пунктам. И т.д. В какой точке отрезка АВ произойдет их 2017 встреча?
9. Однажды, гуляя в лесу, Маша обнаружила полянку, вокруг которой росли сосны. Маша выяснила, что высота любых двух соседних сосен отличается ровно на 1 метр. Могло ли на полянке быть ровно (a) 3; (b) 4; (c) 2019; (d) 2020 сосен?
10. Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1см в какую-то сторону, во второй раз – на 2см, в третий – на 3см, и так далее. Докажите, что он не сможет за 2018 прыжков вернуться в начальную точку.
11. Улитка ползёт по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90° каждые 30 минут. Докажите, что она может вернуться в исходную точку только а(a) через целое число часов; (b) через четное число часов.

12. 17 девочек и 17 мальчиков встали в хоровод. Докажите, что у кого-то с обеих сторон стоят девочки.