

Сравнения

1. Докажите, что $4^n - 1$ делится на 3.
2. Докажите, что $43^{101} + 34^{101}$ делится на 77.
3. Сумма трёх натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.
4. Найдите остатки от деления (а) $3^{16} - 2^{55} \cdot 5^{15}$ от деления на 3;
(б) $7778 \cdot 7779 \cdot 7780 \cdot 7781 \cdot 7782 \cdot 7783$ на 7;
(в) $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018$ на 2019;
(г) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 102$ на 103.
(д) 47^{101} на 46, 48, 31;
(е) $7^{2012} + 9^{2015}$ на 10.
5. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{13}$.
6. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел не представимых в виде суммы трёх точных кубов.
7. Докажите, что при любом натуральном n : (а) $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$ делится на 7;
(б) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.
8. Докажите, что $2013! + \frac{4026!}{2013!}$ делится на 4027.
9. Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10} + 10^{100} + \dots + 10^{10000000000}$.