

Графы, рассуждения и связность.

1. В ордене рыцарей Могучей Лопаты каждый рыцарь знаком не менее, чем с половиной ордена. Докажите, что можно выбрать четырёх рыцарей ордена Могучей Лопаты и рассадить за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми (известно, что в ордене больше 4 рыцарей).
2. В Непонятной Конструкции из ниток и палок к самой длинной палке привязана 31 нитка, к самой короткой — только одна, а ко всем остальным — по 20 ниток (нити не связаны между собой, привязаны только к палкам). Докажите, что если поднять Непонятную Конструкцию за длинную палку и потрясти так, чтобы всё, что не привязано, отвалилось, то короткая палка останется висеть.
3. В турнире по крестикам-ноликам в какой-то момент каждый из 22 участников сыграл с какими-то девятью (никакая пара не играла дважды). Докажите, что найдутся 3 участника, не сыгравшие между собой пока ни одной игры.
4. В кружке учатся 20 человек, при этом, какую бы тройку людей мы ни взяли, в ней всегда найдутся двое знакомых. Докажите, что кто-то в этой группе знает хотя бы 9 человек.
5. Можно ли расставить 531 шахматного коня на доске 2020×2020 так, чтобы каждый из них бил ровно 4 других?
6. Орден Масонов настолько тайный, что каждый из его членов знает о не более чем трёх других (при этом, знание взаимно), но настолько популярный, что любые два члена ордена или знают друг о друге или знают такого человека, который знает про этих двоих. Какое наибольшее число людей может быть в этом ордене?
7. На балу каждый кавалер танцевал ровно с 5 дамами и дрался ровно с 5 кавалерами, а каждая дама — танцевала ровно с 5 кавалерами и секретничала ровно с 5 дамами. Докажите, что число участников бала делится на 4.
8. Известно, что если один (кто-угодно) из 7 рыцарей круглого стола прогуливает собрание, то оставшихся шестерых можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый сидел рядом с двумя своими друзьями. Докажите, что если никто из рыцарей собрание не прогуливает, то их тоже можно будет посадить так, что каждый будет сидеть рядом со своими друзьями.