

Графы. Начало.

Простое нестрогое определение графа: Граф — это множество точек-вершин, некоторые из которых (согласно какому-то заданному свойству) соединены линиями-рёбрами.

Строгое математическое определение графа: Графом называется множество $G = (V, E)$, где V — множество вершин (некоторые объекты, в нашем случае — точки на плоскости), а E — множество ребер, являющееся подмножеством пар (*) вершин объединенных некоторым свойством.

«Подмножество пар» — тоже можно обобщить, но мы не будем этого делать.

Определение: Степень вершины v графа, $deg(v)$ — количество выходящих из этой вершины ребер.

Определение: Граф называется полным, если каждая его вершина соединена с каждой. Другое название полного графа — КЛИКА, обозначается K_n , где n — число вершин.

- 0. Творческое задание** Нарисуйте граф, вершинами которого будут являться имена пяти ваших друзей и ваше, а ребро между двумя вершинами будет проведено только в том случае, если в паре имён, которым соответствуют эти вершины, есть общая буква.
- 1.** Сколько рёбер в полном графе **(а)** на 4 вершинах? **(б)** На 10 вершинах? **(с)** На n вершинах?
- 2.** Как вообще посчитать количество рёбер в любом графе, зная число вершин и степень каждой из них?
- 3.** Могут ли степени вершин в графе быть равны:
(а) 5, 2, 3, 1, 3? **(б)** 8, 8, 8, 6, 5, 4, 2, 2, 1? **(с)** 3, 4, 5, 1, 2, 2, 2?
- 4.** В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Путешественник заметил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий делится на три. Можно ли добраться из города 1 в город 9?
- 5.** Во дворе стоят 10 берёз и 6 фонарных столбов. Между ними натянуты бельевые веревки так, что к каждому столбу привязано 7 веревок, а к каждой берёзе — 5. Сколько во дворе бельевых веревок?
- 6.** На карантине жители города М, сидя дома по одному, созванивались друг с другом по скайпу. Вечером спецслужбы посчитали, что каждый из жителей разговаривал по скайпу 3 раза. Могло ли общее количество созвонов по скайпу в этом городе за день быть ровно 2020?

7. Однажды в школе устроили однокруговой (каждая команда играет с каждой) турнир на 15 команд. Докажите, что в любой момент времени турнира найдутся 2 команды, сыгравшие одинаковое число матчей.
8. *Лемма о рукопожатиях:* Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.
9. Можно ли нарисовать на плоскости 7 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими (отрезкам разрешено пересекаться в одной точке)?
10. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали на свободное место. Можно ли такими действиями добиться, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?
11. (а) Из доски 4×4 вырезаны угловые клетки. Может ли шахматный конь обойти всю доску и вернуться на исходную клетку, побывав в каждой клетке ровно один раз? (б) Сколько существует таких обходов?
12. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: 2 белых и 2 черных (сверху два белых, снизу два черных). Можно ли за несколько ходов поставить коней так, чтобы во всех соседних углах стояли кони разного цвета?