

Наконец-то серьёзный лист по комбинаторике.

- Сколькими способами можно разложить 15 разных шариков по 3 пронумерованным коробочкам, если коробочки могут оставаться пустыми?
- Сколькими способами можно переставить буквы в слове
ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ,
чтобы никакие две буквы О не стояли рядом?
- Сколькими способами можно выложить в ряд 5 красных, 5 синих и 5 зеленых шаров так, чтобы никакие два синих шара не лежали рядом?
- На клетчатой бумаге изображен квадрат, каждая сторона которого вмещает ровно n клеток. Сколько в этом квадрате можно нарисовать различных
(а) квадратов? (б) прямоугольников?
(с) букв «Г» (в том числе и как угодно перевёрнутых)?
(д) букв «Т» (в том числе и как угодно перевёрнутых)?
- Робот стоит в левом верхнем углу таблицы $n \times n$. Пронумеруем строки таблицы сверху вниз числами от 0 до 5, а столбцы слева направо (от 0 до 10). По команде робот может передвинуться по клетчатой доске либо на 1 клетку вправо либо на 1 клетку вниз.
(а) Последовательность команд будем называть программой. Какой длины должна быть программа, чтобы робот оказался в правой нижней клетке таблицы? Сколько команд «вправо» должно быть в такой программе? Сколько существует таких программ?
(б) Сколько существует программ, чтобы робот оказался в клетке (m, n) ?
- (а) Робот оказался в клетке (m, n) . В каких клетках таблицы мог находиться робот на предпоследнем шаге? Сколькими способами можно попасть в эти клетки?
(б) Используя предыдущий пункт докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.
(с) Докажите то же свойство, используя формулу C_n^k .
(д) Докажите, что если в задаче про робота в каждой клетке таблицы написать количество путей до неё, получится треугольник Паскаля.
(е) Докажите, что в треугольнике Паскаля записаны биномиальные коэффициенты (тем самым найдите связь между этими двумя объектами.)
- (а) Сколько существует программ длиной n ? Куда может прийти робот за n команд? Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.
- * Сколькими способами из 50 человек, среди которых 25 юношей и 25 девушек, можно выбрать компанию в которой одинаковое число юношей и девушек?

Если кто-то все решит, то у Веры Валерьевны для вас есть пара секретных задач.