

Инвариант. Делимость.

Инвариант — свойство, остающееся неизменным при преобразованиях определённого типа.

1. Лунтик взял у Милы книжку и сосчитал, сколько понадобилось цифр, чтобы пронумеровать все страницы, начиная с первой. У него получилось 100 цифр. Могло ли так быть, или Лунтик ошибся? Если могло, скажите, сколько было страниц.
2. На столе стоят 20 стаканов. Из них 19 стаканов стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?
3. Круг разделен на десять секторов, в каждом из которых стоит фишка. Разрешается за один ход сдвинуть любые две фишки в соседние с ними сектора. Можно ли с помощью таких операций собрать все фишки в одном секторе?
4. Илья Муромец рубил головы Змею Горынычу. Если за один удар он срубал 7 голов, то выростали новые 4 головы. Если же он срубал 2 головы, то выростали новые 8 голов. Убьёт ли Илья Муромец Змея Горыныча, если у того первоначально было три головы?
5. Камни лежат в трёх кучках: в одной — 51 камень, в другой — 49 камней, а в третьей — 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из чётного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
6. В трех вершинах квадрата сидит по кузнечику. За один ход любой кузнечик допрыгивает до любого другого кузнечика и сразу же делает еще один такой же прыжок в том же направлении. Могут ли кузнечики через несколько прыжком собраться в других трех вершинах того же квадрата?
7. На 12 деревьях, расположенных по окружности, сидели 12 весёлых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.
8. На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
9. Сломанный банкомат меняет любые две монеты на любые три по вашему выбору, а любые три — на любые две. Сможет ли Захар обменять у него 100 монет достоинством 1 рубль на 100 монет достоинством 1 евро, отдав ему при обмене ровно 2019 монет?
10. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 2, вычитается из того числа, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{2019} . Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 2019?