

Об одном важном свойстве некоторых чисел

1. Из набора домино выбросили все кости с шестёрками. Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд?
2. На волшебной яблоне выросли 15 бананов и 20 апельсинов. Одновременно разрешается срывать один или два плода. Если сорвать один из плодов, вырастет такой же, если сорвать сразу два одинаковых плода — вырастет апельсин, а если два разных — вырастет банан.
 - (a) В каком порядке надо срывать плоды, чтобы на яблоне остался ровно один плод?
 - (b) Можете ли вы определить, какой это будет плод?
 - (c) Можно ли срывать плоды так, чтобы на яблоне ничего не осталось?
3. Хулиганы Паша и Лёша порвали стенгазету, причём Паша рвал каждый кусок на 5 частей, а Лёша на 9. При попытке собрать стенгазету нашли 1988 обрывков. Докажите, что нашли не все кусочки.
4. Можно ли расставить числа (a) от 1 до 7; (b) от 1 до 9 по кругу так, чтобы каждое из них делилось на разность своих соседей?
5. На пяти карточках записаны натуральные числа от 1 до 5. Настя и Надя взяли себе, не глядя, по две карточки, а оставшуюся карточку, также не глядя, спрятали. Изучив свои карточки, Настя сказала Наде: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках чётна!», и была права. Какие числа записаны на Настиных карточках?
6. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причём их расположение симметрично относительно обеих главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.
7. Может ли кузнечик за 25 прыжков вернуться в начальную позицию, если он прыгает:
 - (a) по прямой в любую сторону на нечётное расстояние;
 - (b) по плоскости на расстояние 1 в любом из четырёх основных направлений (вверх, вниз, вправо, влево);
 - (c) по плоскости ходом коня (то есть по диагонали прямоугольника 1×2);
 - (d) по диагонали прямоугольника $a \times b$ (a и b фиксированы).
8. По окружности стоят 237 точек двух цветов. Доказать, что найдутся две точки одного цвета, разделённые ровно двумя точками.
9. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.