

Перестановки

1. На карточках записаны числа от 1 до 10. Карточки выложены одна за одной в произвольном порядке.
 - (а) Разрешается поменять местами любые две соседние карточки. Докажите, что за несколько таких операций числа можно расположить в порядке возрастания.
 - (б) Докажите, что в предыдущем пункте можно справиться не более, чем за 45 обменов.
2. На уроке физкультуры в шеренгу стоят 30 учеников математического класса: 29 мальчиков и 1 девочка. Физрук может поменять местами девочку с любым из мальчиков. Докажите, что физрук сможет выстроить детей по росту.
3. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10.
 - (а) Разрешается менять местами любые два тома, если число, написанное на одном из них, делится на число, написанное на другом.
 - (б) Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов.Докажите, что за несколько таких операций можно расположить все тома энциклопедии в правильном порядке.
4. На доске в некотором порядке написаны числа от 1 до 444. Если на первом месте написано число x , то разрешается переставить первое $(x + 1)$ число в порядке убывания. Докажите, что рано или поздно на первом месте окажется число 444.
5. В ряд стоят 100 детей разного роста. Разрешается выбрать любых 50 детей, стоящих подряд, и переставить их между собой как угодно (остальные остаются на своих местах). Как всего за шесть таких перестановок гарантированно построить всех детей по убыванию роста слева направо?
6. В очереди в школьную столовую стоят 20 школьников. Учитель может
 - переставить школьника из начала очереди в конец очереди;
 - поменять местами двух школьников, стоящих в начале очереди.

Докажите, что учитель может расставить школьников в любом порядке.

7. На полковом плацу нарисован прямоугольник 1×7 , разбитый на 7 квадратов. В квадратах написаны числа от 1 до 7, но не обязательно по порядку. Старшина выстроил семерых солдат в шеренгу так, что каждый стоит в своем квадрате. По команде «Переставься!» каждый солдат переходит из своего квадрата в k -ый слева, где k — число, написанное в квадрате, где стоит солдат.

- (a) Докажите, что начальное расположение солдат рано или поздно повторится.
- (b) Докажите, что это произойдёт не позже, чем через 12 команд.