

Признаки делимости

1. Какую цифру можно написать вместо звёздочки так, чтобы число
(a) $269 * 6$ делилось на 4?
(b) $2 * 45$ делось на 9?
(c) $2 * 45$ делилось на 3?
(d) $5417*$ делилось на 6?

Во всех пунктах этой задачи необходимо найти все возможные ответы и доказать, что других ответов нет.

2. Запишите наименьшее 10-значное число в котором
(a) все цифры различны, и оно делится на 4;
(b) все цифры различны, и оно делится на 25.
3. Делится ли число
(a) $11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \dots \cdot 91 - 1$ на 5?
(b) $19 \cdot 29 \cdot 39 \cdot \dots \cdot 99 + 1$ на 5?

4. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр — названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

5. Известно, что

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 35 = 10333147966386144929 * 66651337523200000000.$$

Найдите цифру, замененную звездочкой.

6. На доске написано число, состоящее только из цифр 5 и 6 и делящееся на 9. У этого числа стерли три последние цифры. Оказалось, что полученное число также делится на 9. Докажите, что первоначальное число не делится на 4.
7. Фрекен Бок спрятала плюшки в сейф, а Карлсон с Мальшом хотят их оттуда достать. Они знают, что код от сейфа состоит из 7 цифр — двоек и троек, причем двоек больше, чем троек. И что код делится и на 3, и на 4. Смогут ли Мальш и Карлсон с первой попытки открыть сейф?
8. Натуральное число n в три раза больше суммы своих цифр. Докажите, что n делится на 27.