

Немного про фуры

Чаще всего в качестве первой попытки можно подставить константы (например, 0 или 1), после чего (если возможно) использовать подстановку выражений, которые могут превратить какую-либо часть уравнения в константу. Например, если в уравнении присутствует $f(x + y)$ и мы нашли $f(0)$, то подставляем $y = -x$. В более трудных задачах подстановки будут менее очевидными.

1. Функция f такова, что для любых положительных x и y выполняется равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$. Найдите $f(2007)$, если $f(\frac{1}{2007}) = 1$.
2. Существует ли такая функция $f(x)$, определённая для всех действительных чисел, что $f(\sin x) + f(\cos x) = \sin x$?
3. Функция $f(x)$ определена на положительной полуоси и принимает только положительные значения. Известно, что $f(1) + f(2) = 10$ и $f(a + b) = f(a) + f(b) + \sqrt{f(a)f(b)}$ при любых a и b . Найдите $f(2^{2011})$.
4. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z)$.
5. Функция $f(x)$ при каждом значении $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f(x) + (x + \frac{1}{2})f(1 - x) = 1$. Найдите все такие функции $f(x)$.

Математическая индукция. С помощью этого метода, зная $f(1)$, находим $f(n)$ для любого целого n . Затем находим $f(\frac{1}{n})$ и $f(r)$ для рациональных r . Данный подход применяется в ситуациях, когда функции определены на $\mathbb{Q}$, и является очень полезным, особенно в несложных задачах.

6. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
7. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что $f(x + y) = f(x)f(y)$.
8. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что $f(xy) = f(x) + f(y)$.
9. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что $f(xy) = f(x)f(y)$.
10. Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ такие, что $f(1) = 2$ и $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$.
11. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(x + y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y)$.

Исследование инъективности и сюръективности функций.

Напоминание. Функция $f : A \rightarrow B$ называется *инъективной*, если для любых $x_1 \neq x_2$ верно $f(x_1) \neq f(x_2)$. Функция f называется *сюръективной*, если она принимает все значения из B , т.е. для любого $y \in B$ найдётся $x \in A$ такой, что $f(x) = y$.

12. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $x + f(x) = f(f(x))$. Решите уравнение $f(f(x)) = 0$.
13. Существуют ли функции $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(g(x)) = x^2$ и $g(f(x)) = x^3$?
14. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$.
15. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(xf(x) + f(y)) = y + (f(x))^2$.
16. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(xf(x + y)) = f(yf(x)) + x^2$.