Немного про рекурренты

Соотношение, выражающее $(n+1)$-й член последовательности через n-й, $(n-1)$-й и т.д., называется *рекуррентным* или *возвратным*, а последовательность называют заданной *рекуррентно*. Если же последовательность задается так, что её n-й член выражается через само число n и функции от него, то говорят, что последовательность задана явно.

Линейные рекуррентные последовательности второго порядка — те, для которых возвратное соотношение имеет вид $a_{n+2} = C_1 a_{n+1} + C_2 a_n$, где C_1 и C_2 — некоторые числа.

Аналогично определяются возвратные соотношения первого, третьего и более высоких порядков.

1. Докажите, что любая геометрическая прогрессия является рекуррентной последовательностью первого порядка, а любая арифметическая — второго.

2. Найдите линейное рекуррентное соотношение для $x_n = n$ и $x_n = n^2$.

3. Докажите, что последовательность $p_n = n^k$ является линейной рекуррентной последовательностью $(k+1)$-го порядка.

4. Рассмотрим последовательность $\{r_n\}$, удовлетворяющую

$$r_{n+2} = 5r_{n+1} - 6r_n \tag{1}$$

(a) Докажите, что для любого C последовательность $\{Cr_n\}$ также удовлетворяет (1).

(b) Докажите, что если две последовательности $\{r_n\}$ и $\{s_n\}$ удовлетворяют (1), то и последовательность $\{r_n + s_n\}$ ему также удовлетворяет.

(c) Найдите все геометрические прогрессии, удовлетворяющие соотношению (1).

(d) Напишите формулу с двумя произвольными параметрами α и β, являющуюся формулой n-го члена для последовательностей, удовлетворяющих (1).

(e) Докажите, что ваша формула исчерпывает все последовательности, удовлетворяющие (1) (каждая такая последовательность однозначно задается двумя первыми членами или параметрами α и β).

5. **Формула Бине.** Проделайте аналогичные операции и найдите формулу n-го члена последовательности Фибоначчи: $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Докажите, что эта страшная формула при всех n дает в результате только целые числа.

6. Найдите формулу n-го члена последовательности

$$t_0 = 0, t_1 = 1, t_{n+2} = 4t_{n+1} - 4t_n$$

.

Назовём *характеристическим многочленом* рекурренты $a_{n+2} = C_1 a_{n+1} + C_2 a_n$ полином

$$f(\lambda) = \lambda^2 - C_1\lambda - C_2.$$

Он имеет два корня λ_1, λ_2 (возможно, комплексных).

7. Докажите, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ для некоторых α и β.

8. Докажите, что если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то $a_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^n$ для некоторых α и β.

9. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + 1 = 0$. Докажите, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ является целым и не делится на 5.