КБШ

Канал большого шага/Кислородный баллон шаровой

Словарь сокращений русского языка, 2014г.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Для любых действительных чисел выполнено неравенство

$$\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)\geqslant\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$$

Полезнейшее следствие из неравенства Коши-Буняковского. Для любых положительных чисел выполнено неравенство

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+\ldots+b_n}$$

Все задачи решать обязательно через КБШ!

1. Для положительных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ докажите

(a) $\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1}\geqslant a_1+a_2+\ldots+a_n$;

(b) $(a_1+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$;

(c) $\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}\geqslant\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^2$

2. Докажите для положительных a, b, c

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

3. Докажите, что $ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leqslant 1$ для $|a|\leqslant 1$ и $|b|\leqslant 1$.

4. Пусть $a, b>0$ и $a^2+b^2>a+b$. Докажите, что $a^3+b^3>a^2+b^2$.

5. Пусть $a+2b+3c\geqslant 14$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2\geqslant 14$.

6. Докажите неравенства для положительных чисел:

(a) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant 3/2$.

(b) $\frac{a}{2b+c}+\frac{b}{2c+a}+\frac{c}{2a+b}\geqslant 1$.

7. Докажите неравенство

$$\sqrt{a}(a+c-b)+\sqrt{b}(a+b-c)+\sqrt{c}(b+c-a)\leqslant\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)},$$

где a, b, c — длины сторон некоторого треугольника.