Неравенство Йенсена

Будем говорить, что функция $f(x)$ **выпукла**, если для любых двух значений аргумента x, y и для любого числа $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$f(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y) \leqslant \alpha \cdot f(x) + (1-\alpha) \cdot f(y)$$

0. Докажите, что следующие функции выпуклы при положительном x:

(a) x^2; **(b)** x^3; **(c)** x^n; **(d)** $\frac{1}{x}$.

Геометрически это означает, что выбрав две точки на графике и соединив их хордой, мы обнаружим, что дуга графика между этими двумя точками лежит не выше данной хорды.

Кроме того, функция выпукла на отрезке тогда и только тогда, когда её вторая производная на этом отрезке неотрицательна.

Неравенство Йенсена. Пусть f — выпуклая функция. Тогда

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа из области определения функции f, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — положительные числа, сумма которых равна единице.

Весовое неравенство Йенсена. Пусть f — выпуклая функция. Тогда

$$f\left(\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}\right) \leq \frac{\sum m_i f(x_i)}{\sum m_i},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа из области определения функции f, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — неотрицательные числа, сумма которых строго положительна.

1. Неравенство Коши.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n > 0).$$

2. Неравенство между средним арифметическим и средним степенным.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^n}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n > 0, n \in \mathbb{N}).$$

3. КБШ. Для любых действительных чисел выполнено неравенство

$$\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right) \geqslant \left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2$$

Задачи.

1. Неравенство между взвешенным средним арифметическим и средним геометрическим.

$$\sum_{i=1}^{n} q_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{q_i} \quad (a_1,\ldots,a_n,q_1,\ldots,q_n>0, q_1+q_2+\cdots+q_n=1).$$

2. Неравенство Минковского.

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} \leq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)} \quad (a_1,a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n,>0).$$

3. Докажите, что

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}.$$

4. Пусть a, b — числа из промежутка $[-1,1]$. Доказать, что

$$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2} \leq \sqrt{4-(a+b)^2}.$$

5. Докажите неравенство для положительных чисел:

$$\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2} \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i^2+b_i^2}.$$

6. Докажите неравенство

$$\frac{p_1}{p_2+p_3}+\frac{p_2}{p_3+p_4}+\frac{p_3}{p_4+p_5}+\frac{p_4}{p_5+p_1}+\frac{p_5}{p_1+p_2} \geq \frac{5}{2}$$

для положительных чисел.