Геометрия масс

Или тысяча и один способ доказать, что медианы пересекаются в одной точке

Пусть M — некоторая точка плоскости, и m — ненулевое число. Материальной точкой (M, m) называется пара точка M с числом m, причем число m называется массой материальной точки (M, m), а точка M — носителем этой материальной точки.

Центром масс системы материальных точек $(M_1, m_1), (M_2, m_2), \ldots, (M_n, m_n)$ называется такая точка Z, для которой имеет место равенство $m_1 \cdot \overrightarrow{ZM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{ZM_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{ZM_n} = 0$.

1. **Основная теорема. (a)** Если точка Z является центром масс системы материальных точек $(M_1, m_1), (M_2, m_2), \ldots, (M_n, m_n)$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$, то для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

   (b) Обратно, если для некоторой точки O выполняется это равенство, то точка Z — центр масс данной системы материальных точек.

2. Для конечной системы материальных точек с ненулевой суммой масс существует единственный центр масс.

3. **Правило рычага.** Центр масс Z двух материальных точек $(M_1, m_1), (M_2, m_2)$ с неотрицательными массами расположен на отрезке M_1M_2, причем $m_1 \cdot |\overrightarrow{M_1Z}| = m_2 \cdot |\overrightarrow{M_2Z}|$.

4. **Основная теорема.** Если точка Z является центром масс системы материальных точек $(M_1, m_1), (M_2, m_2), \ldots, (M_n, m_n)$, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_n \neq 0$, то для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{OM_n}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

5. **Правило группировки.** Пусть дана система материальных точек (M_1, m_1), (M_2, m_2), $\ldots$, (M_n, m_n), и пусть точка O — центр масс системы, состоящей из первых k материальных точек данной системы. Тогда центр масс данной системы совпадает с центром масс системы материальных точек $(O, m_1 + m_2 + \ldots + m_k), (M_{k+1}, m_{k+1}), \ldots, (M_n, m_n)$.

6. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $2:1$, считая от вершины.

7. Через точку P, расположенную внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Они пересекают стороны AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Пусть Q — точка пересечения средних линий $KLMN$, а S — центр $ABCD$. Докажите, что Q — середина PS.

8. В треугольнике ABC проведена медиана AM, точка P — её середина. Прямая BP пересекает сторону AC в точке E. Найдите, в каком отношении точка E делит AC.

9. На сторонах шестиугольника последовательно отмечены середины сторон B_1, $\ldots, B_6$. Всегда ли точка пересечения медиан треугольника $B_1B_3B_5$ будет совпадать с точкой пересечения медиан треугольника $B_2B_4B_6$?

10. Точка X лежит на стороне BC, а точка Y — на стороне AC треугольника ABC. При этом $BX : XC = 2 : 1$, $CY : YA = 3 : 2$, В каком отношении точка пересечения AX и BY делит эти отрезки?

11. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

12. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

13. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, K, L, M и N середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что точка пересечения отрезков KM и LN является серединой этих отрезков, а также и серединой отрезка, соединяющего середины диагоналей.

14. В треугольнике ABC точка F делит сторону BC в отношении $3 : 1$, считая от вершины B. Точки M и P отсекают от сторон AB и AC соответственно $1/5$ и $1/6$ части, считая от вершины A. В каком отношении делится каждый из отрезков MP и AF точкой их пересечения?

15. Докажите теорему Чевы, используя геометрию масс.

16. Какие массы нужно поместить в вершины треугольника, чтобы центр масс оказался в центре описанной окружности?