

Немного комбы

Угадайте, какие из этих задач из олимпиады Физтеха?

1. Докажите, что в любой компании из 13 человек либо найдётся человек, знающий четырёх других, либо найдутся четверо, попарно не знакомых.
2. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым, какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?
3. На каждой из прямых $x = 2$ и $x = 9$ отмечено по 400 точек с ординатами $1, 2, 3, \dots, 400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
4. Есть 207 различных карточек с числами $1, 2, 3, 2^2, 3^2, \dots, 2^{103}, 3^{103}$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 3 карточки так, чтобы произведение чисел на выбранных карточках было квадратом целого числа, делящегося на 6?
5. Дан квадрат размера n на n , разбитый вертикальными и горизонтальными линиями сетки на единичные квадратики. Граница квадрата тоже считается линией. *Контуром* называется любая замкнутая ломаная без самопересечений, идущая по линиям сетки. Какое максимальное количество контуров можно провести в квадрате так, чтобы никакие два из них не содержали общего отрезка? Контуров могут иметь общие точки, некоторые из них могут содержать внутри себя частично или целиком другие контуры.
6. В таинственном лесу два мудреца в чёрном и белом колпаках раздают гномикам грибочки. К ним в две очереди выстроились $2n$ гномиков, n в чёрных и n в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномикам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдёт следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)