Натуральные, целые и действительные

1. Последовательность чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots, 12$ такова, что $a_1 = 1, a_{12} = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ для всех натуральных $n = 1, 2, \ldots, 10$. Найдите a_4.
2. Найдите все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы
$$n = x + y + (x, y) + [x, y]$$
для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x, y) и $[x, y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.
3. Пусть $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ и $ac + bd = 0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d. Найдите все возможные значения выражения $ab + cd$.
4. Три действительных числа таковы, что модуль каждого из них не меньше модуля суммы двух остальных. Докажите, что сумма всех трёх чисел равна нулю.
5. Найдите все натуральные n, представимые в виде
$$n = \frac{x + \frac{1}{x}}{y + \frac{1}{y}}$$
для некоторых натуральных x, y.
6. Пусть a, b, c — произвольные числа из интервала $(0, 1)$. Докажите, что одно из трёх произведений $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ всегда не больше $\frac{1}{4}$.
7. Найти все пары натуральных чисел a и b такие, что оба числа $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ являются целыми.