Теоремы Чевы и Менелая

Дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на сторонах BC, AC и AB соответственно.

Теорема Чевы. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 конкуренты[1] тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = 1$$

Теорема Менелая. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = -1$$

Определение. Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 называются *чевианами* треугольника ABC.

1. **(a)** Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB, BC и AC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке G (*точка Жергонна*).

(b) Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон AB, BC и AC в точках C_2, A_2 и B_2 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке N (*точка Нагеля*).

2. Касательные к описанной окружности неравнобедренного треугольника ABC в точках A, B и C пересекают продолжения сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

3. **(a)** В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 и биссектриса внешнего угла CC_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

(b) В треугольнике ABC проведены биссектрисы внешних углов AA_1, BB_1 и CC_1 (точки A_1, B_1 и C_1 лежат на прямых BC, CA и AB). Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

4. (*Обобщение предыдущей задачи*) Дан треугольник ABC и произвольная точка P. $(AP) \cap (BC) = A_1, (BP) \cap (AC) = B_1, (CP) \cap (AB) = C_1$. $(B_1C_1) \cap (BC) = A_2, (A_1B_1) \cap (AB) = C_2, (A_1C_1) \cap (AC) = B_2$. Доказать, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой, которая называется *трилинейной полярой* точки P относительно треугольника ABC.

[1] конкуренты – это значит либо пересекаются в одной точке, либо все вместе параллельны.

5. Прямые AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Около треугольника $A_1B_1C_1$ описана окружность, пересекающая вторично прямые BC, CA, AB в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

6. В треугольник ABC вписана полуокружность, диаметр которой принадлежит стороне BC. Стороны AB и AC касаются полуокружности соответственно в точках C_1 и B_1. Докажите, что прямые BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AA_1 треугольника ABC.

7. **(a)** Серединный перпендикуляр к биссектрисе AD треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E. Докажите, что $BE : CE = c^2 : b^2$.

(b) Докажите, что точки пересечения серединных перпендикуляров к биссектрисам треугольников и продолжений соответствующих сторон лежат на одной прямой.

8. На прямых AB, BC и CD четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L и M. Прямые KL и AC пересекаются в точке P, LM и BD — в точке Q. Докажите, что точка пересечения прямых KQ и MP лежит на прямой AD.

9. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CK, и в треугольнике ACK проведена биссектриса CE. Прямая, проходящая через точку B параллельно CE, пересекает CK в точке F. Докажите, что прямая EF делит отрезок AC пополам.

10. Пусть P — произвольная точка на высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC. Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Доказать, что $\angle B_1A_1P = \angle C_1A_1P$.