Упорядочивания

1. Имеется 36 борцов. У каждого некоторый уровень силы, и более сильный всегда побеждает более слабого, а равные по силе сводят поединок вничью. Всегда ли этих борцов можно разбить на пары так, что все победители в парах будут не слабее, чем все те, кто сделал ничью или проиграл, а все сделавшие ничью будут не слабее всех тех, кто проиграл?

2. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

3. Пусть каждое из $2n$ различных натуральных чисел $a_1, \ldots, a_{2n}$ не превосходит n^2 $(n > 2)$. Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.

4. Дед Мороз пришёл в детский сад с подарками. Дети их посмотрели, и каждый ребенок написал на листе бумаги, сколько подарков ему нравится. Дед Мороз вычислил сумму обратных величин ко всем числам, которые написали дети, и получил число, меньшее или равное 1. Докажите, что Дед Мороз может дать каждому ребенку по одному подарку, который ему нравится.

5. Обозначим через a и A соответственно наименьшее и наибольшее из n различных натуральных чисел. Докажите, что их НОД не больше A/n и их НОК не меньше na.

6. 2000 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин. Доказать, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.

7. На столе лежат две кучки монет. Известно, что суммарный вес монет из первой кучки равен суммарному весу монет из второй кучки, а для каждого натурального числа k не превосходящего числа монет как в первой, так и во второй кучке, суммарный вес k самых тяжелых монет из первой кучки не больше суммарного веса k самых тяжелых монет из второй кучки. Докажите, что если заменить каждую монету, вес которой не меньше x, на монету веса x (в обеих кучках), то первая кучка монет окажется не легче второй , каково бы ни было положительное число x.

8. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из однои точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в однои точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

9. Каждое из семи различных натуральных чисел не превосходит 1706. Докажите, что среди них найдутся три a, b и c, такие, что $a < b + c < 4a$.

10. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе

Домашнее задание

11. Возрастающая последовательность $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ такова, что любой её член делится на 1005 или на 1006, но не делится на 97. Для какого наименьшего k существует последовательность, такая что разность между любыми соседними членами этой последовательности не более k?

Упорядочивания

1. Имеется 36 борцов. У каждого некоторый уровень силы, и более сильный всегда побеждает более слабого, а равные по силе сводят поединок вничью. Всегда ли этих борцов можно разбить на пары так, что все победители в парах будут не слабее, чем все те, кто сделал ничью или проиграл, а все сделавшие ничью будут не слабее всех тех, кто проиграл?

2. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

3. Пусть каждое из $2n$ различных натуральных чисел $a_1, \ldots, a_{2n}$ не превосходит n^2 $(n > 2)$. Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.

4. Дед Мороз пришёл в детский сад с подарками. Дети их посмотрели, и каждый ребенок написал на листе бумаги, сколько подарков ему нравится. Дед Мороз вычислил сумму обратных величин ко всем числам, которые написали дети, и получил число, меньшее или равное 1. Докажите, что Дед Мороз может дать каждому ребенку по одному подарку, который ему нравится.

5. Обозначим через a и A соответственно наименьшее и наибольшее из n различных натуральных чисел. Докажите, что их НОД не больше A/n и их НОК не меньше na.

6. 2000 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин. Доказать, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.

7. На столе лежат две кучки монет. Известно, что суммарный вес монет из первой кучки равен суммарному весу монет из второй кучки, а для каждого натурального числа k не превосходящего числа монет как в первой, так и во второй кучке, суммарный вес k самых тяжелых монет из первой кучки не больше суммарного веса k самых тяжелых монет из второй кучки. Докажите, что если заменить каждую монету, вес которой не меньше x, на монету веса x (в обеих кучках), то первая кучка монет окажется не легче второй , каково бы ни было положительное число x.

8. На кольцевом треке $2N$ велосипедистов стартовали одновременно из однои точки и поехали с постоянными различными скоростями (в одну сторону). Если после старта два велосипедиста снова оказываются одновременно в однои точке, назовем это встречей. До полудня каждые два велосипедиста встретились хотя бы раз, при этом никакие три или больше не встречались одновременно. Докажите, что до полудня у каждого велосипедиста было не менее N^2 встреч.

9. Каждое из семи различных натуральных чисел не превосходит 1706. Докажите, что среди них найдутся три a, b и c, такие, что $a < b + c < 4a$.

10. В наборе несколько гирь, все веса которых различны. Известно, что если положить любую пару гирь на левую чашу, можно весы уравновесить, положив на правую чашу одну или несколько гирь из остальных. Найдите наименьшее возможное число гирь в наборе

Домашнее задание

11. Возрастающая последовательность $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ такова, что любой её член делится на 1005 или на 1006, но не делится на 97. Для какого наименьшего k существует последовательность, такая что разность между любыми соседними членами этой последовательности не более k?