

Угадай точку.

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Пусть I, I_1 и I_2 - центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что CI перпендикулярно I_1I_2 .
2. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AC = CM$ и $MN = NB$. Высота треугольника, проведенная из вершины B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH – биссектриса угла MNC .
3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB . Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC .
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и K так, что $AM = AC = CK$. Отрезки AK и CM пересеклись в точке E . Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки E на сторону AC , проходит через центр вписанной в треугольник окружности.
5. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M равноудаленную от точек C и D . Пусть K - середина AB . Докажите, что угол MKD прямой.
6. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.
7. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC — точка L так, что $BK = CL$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что прямые DP и KL перпендикулярны.
8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели триссектрисы углов AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 , причем точки A_2, B_2 лежат на отрезках CA_1, CB_1 соответственно. Пусть P - точка пересечения AA_2 и BB_2 , Q - точка пересечения AA_1 и BB_1 . Докажите, что P - центр описанной окружности треугольника QA_2B_2 .
9. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны CD . Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM , а через точку M – прямую, перпендикулярную диагонали BD . Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD .
10. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 , лежит на стороне BC .

Домашнее задание

11. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка O -точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности четырехугольника. Докажите, что OO_1 биссектриса угла BO_1C .

Угадай точку.

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена высота CH . Пусть I, I_1 и I_2 - центры вписанных окружностей треугольников ABC, ACH и BCH соответственно. Докажите, что CI перпендикулярно I_1I_2 .
2. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AC = CM$ и $MN = NB$. Высота треугольника, проведенная из вершины B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH – биссектриса угла MNC .
3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB . Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC .
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и K так, что $AM = AC = CK$. Отрезки AK и CM пересеклись в точке E . Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки E на сторону AC , проходит через центр вписанной в треугольник окружности.
5. В параллелограмме $ABCD$ опустили перпендикуляр BH на сторону AD . На отрезке BH отметили точку M равноудаленную от точек C и D . Пусть K - середина AB . Докажите, что угол MKD прямой.
6. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.
7. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K , а на стороне BC — точка L так, что $BK = CL$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P . Докажите, что прямые DP и KL перпендикулярны.
8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели триссектрисы углов AA_1, AA_2, BB_1, BB_2 , причем точки A_2, B_2 лежат на отрезках CA_1, CB_1 соответственно. Пусть P - точка пересечения AA_2 и BB_2 , Q - точка пересечения AA_1 и BB_1 . Докажите, что P - центр описанной окружности треугольника QA_2B_2 .
9. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны CD . Через точку C провели прямую, перпендикулярную прямой BM , а через точку M – прямую, перпендикулярную диагонали BD . Докажите, что два проведенных перпендикуляра пересекаются на прямой AD .
10. В треугольнике ABC угол A равен 60° . Пусть BB_1 и CC_1 — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что точка, симметричная вершине A относительно прямой B_1C_1 , лежит на стороне BC .

Домашнее задание

11. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ точка O -точка пересечения диагоналей. Точка O_1 симметрична O относительно AD и лежит на описанной окружности четырехугольника. Докажите, что OO_1 биссектриса угла BO_1C .