

Симметрия

0. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два равносторонних треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая их вершины, лежащие вне параллелограмма, проходит через центр параллелограмма.
1. а) Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.
б) Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке.
2. В треугольник вписана окружность и проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образовавшегося при пересечении данного треугольника и его образа, попарно равны, а три его большие диагонали пересекаются в одной точке.
3. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы углов B и C .
а) Докажите, что прямые DE и BC параллельны.
б) Докажите, что если $AD = AE$, то треугольник ABC равнобедренный.
4. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , угол B которого равен 30° . На его катете BC выбирают такую точку K , что $AK + KM = BC$. Докажите, что $MK \perp AB$.
5. Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
6. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45° . Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M .
7. На сторонах AC и AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A взяты точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = \angle ABC$. Точки E' и F' — основания перпендикуляров, опущенных на BC из точек E и F соответственно. Докажите, что $E'E + EF + FF' \leq BC$.
8. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1 , пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2 , тоже пересекаются в одной точке.
9. Доказать, что площадь четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.
10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны стороны AB, BC и CD , M — середина стороны AD . Известно, что угол BMC — прямой. Найдите угол между диагоналями AC и BD .

Домашнее задание

11. Точка C лежит внутри прямого угла AOB . Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.
12. В треугольнике ABC угол C — прямой. На стороне AC нашлась такая точка D , а на отрезке BD — такая точка K , что $\angle B = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$.

Симметрия

0. На противоположных сторонах параллелограмма как на сторонах построены вне параллелограмма два равносторонних треугольника. Докажите, что прямая, соединяющая их вершины, лежащие вне параллелограмма, проходит через центр параллелограмма.
1. а) Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.
б) Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M . Через точки A, B, C и D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA и MB соответственно. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке.
2. В треугольник вписана окружность и проведены касательные, параллельные сторонам треугольника. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника, образовавшегося при пересечении данного треугольника и его образа, попарно равны, а три его большие диагонали пересекаются в одной точке.
3. Точки D и E — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы углов B и C .
а) Докажите, что прямые DE и BC параллельны.
б) Докажите, что если $AD = AE$, то треугольник ABC равнобедренный.
4. Точка M — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , угол B которого равен 30° . На его катете BC выбирают такую точку K , что $AK + KM = BC$. Докажите, что $MK \perp AB$.
5. Докажите, что прямые, проведённые через середины сторон вписанного четырёхугольника перпендикулярно противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.
6. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом 45° . Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M .
7. На сторонах AC и AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A взяты точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = \angle ABC$. Точки E' и F' — основания перпендикуляров, опущенных на BC из точек E и F соответственно. Докажите, что $E'E + EF + FF' \leq BC$.
8. Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1 , пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2 , тоже пересекаются в одной точке.
9. Доказать, что площадь четырёхугольника не превосходит полусуммы произведений противоположных сторон.
10. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ равны стороны AB, BC и CD , M — середина стороны AD . Известно, что угол BMC — прямой. Найдите угол между диагоналями AC и BD .

Домашнее задание

11. Точка C лежит внутри прямого угла AOB . Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.
12. В треугольнике ABC угол C — прямой. На стороне AC нашлась такая точка D , а на отрезке BD — такая точка K , что $\angle B = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2DC$.