Для тех кто знает слишком много

1. (10-3-2019 финал) В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью $101, 102, \ldots, 200$ человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

2. (9-2-2019 финал) При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1$$

имеет по крайней мере один целый корень?

3. (10-7-2019 финал) В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо сыгранной, либо несыгранной. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют?

4. (9-6-2019 финал) На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M - середина отрезка DT . Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

5. (11-5-2018 регион) Назовём лодочкой трапецию с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадратика двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку?

6. (9-5-2019 регион) Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?

Для тех кто знает слишком много

1. (10-3-2019 финал) В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью $101, 102, \ldots, 200$ человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

2. (9-2-2019 финал) При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1$$

имеет по крайней мере один целый корень?

3. (10-7-2019 финал) В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо сыгранной, либо несыгранной. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют?

4. (9-6-2019 финал) На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M - середина отрезка DT . Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$.

5. (11-5-2018 регион) Назовём лодочкой трапецию с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадратика двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку?

6. (9-5-2019 регион) Каждая грань куба $1000 \times 1000 \times 1000$ разбита на 1000^2 квадратных клеток со стороной 1. Какое наибольшее количество этих клеток можно закрасить так, чтобы никакие две закрашенные клетки не имели общей стороны?