Разнобой 9

1. В ряд лежит $2n$ груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно разложить все груши по n пакетам по две груши в каждый и выложить эти пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов также отличались не более, чем на 1 г.

2. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками

3. Про положительные числа a, b, c, d, e известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$$

   Докажите, что среди этих чисел найдутся три такие, что не существует треугольника с такими длинами сторон.

4. Каждыи отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красныи цвет, если между его концами четное число вершин, и в синии — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n

6. Назовём точку на плоскости узлом, если обе её координаты - целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.

Разнобой 9

1. В ряд лежит $2n$ груш. Массы любых двух соседних груш отличаются не более, чем на 1 г. Докажите, что можно разложить все груши по n пакетам по две груши в каждый и выложить эти пакеты в ряд так, чтобы массы любых двух соседних пакетов также отличались не более, чем на 1 г.

2. В шахматном турнире каждый участник встретился с каждым один раз. В каждом туре каждый участник проводил по одной встрече. Не меньше чем в половине всех встреч оба участника были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре была хотя бы одна встреча между земляками

3. Про положительные числа a, b, c, d, e известно, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$$

   Докажите, что среди этих чисел найдутся три такие, что не существует треугольника с такими длинами сторон.

4. Каждыи отрезок с концами в вершинах правильного 100-угольника покрасили — в красныи цвет, если между его концами четное число вершин, и в синии — в противном случае (в частности, все стороны 100-угольника красные). В вершинах расставили числа, сумма квадратов которых равна 1, а на отрезках — произведения чисел в концах. Затем из суммы чисел на красных отрезках вычли сумму чисел на синих. Какое наибольшее число могло получиться?

5. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n

6. Назовём точку на плоскости узлом, если обе её координаты - целые числа. Дан треугольник с вершинами в узлах, внутри него расположено не меньше двух узлов. Докажите, что среди узлов внутри треугольника можно выбрать такие два узла, что проходящая через них прямая содержит одну из вершин треугольника или параллельна одной из сторон треугольника.