Разнобой

1. (9-1 регион, год не помню) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

2. (9-1-2018 финал) Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ - бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые.

3. Докажите, что всякое натуральное число может быть представлено в виде отношения двух натуральных чисел, в записи каждого из которых встречаются подряд цифры 2019.

4. (9-2 год не помню) Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, полным, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обяза- тельно лежащих в A) таких, что $a + b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

5. (9-3 год не помню) Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n+1, \ldots n+8$. При каких n он сможет это сделать?

6. (9-7-2015 регион) Числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$. Докажите, что $(2+a)(2+b) > cd$.

7. (9-8-2017) Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала.

Разнобой

1. (9-1 регион, год не помню) Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

2. (9-1-2018 финал) Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ - бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые.

3. Докажите, что всякое натуральное число может быть представлено в виде отношения двух натуральных чисел, в записи каждого из которых встречаются подряд цифры 2019.

4. (9-2 год не помню) Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из натуральных чисел, полным, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обяза- тельно лежащих в A) таких, что $a + b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества натуральных чисел.

5. (9-3 год не помню) Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n+1, \ldots n+8$. При каких n он сможет это сделать?

6. (9-7-2015 регион) Числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$. Докажите, что $(2+a)(2+b) > cd$.

7. (9-8-2017) Изначально на стол положили 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом было ровно 43 карточки с нечётными числами. Затем каждую минуту проводилась следующая процедура. Для каждых трёх карточек, лежащих на столе, вычислялось произведение записанных на них чисел, все эти произведения складывались, и полученное число записывалось на новую карточку, которая добавлялась к лежащим на столе. Через год после начала процесса выяснилось, что на столе есть карточка с числом, делящимся на 2^{10000}. Докажите, что число, делящееся на 2^{10000}, было на одной из карточек уже через день после начала.