Разнобой

1. (9-1-2019) Два приведённых квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов

2. (9-6-2019)Даны четыре последовательных натуральных числа, больших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, больших 1.

3. (9-2-2019) На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников?

4. (9-2 год не помню) Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

5. (10-3-2018) Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура гепард из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

6. (9-9-2019) На доске нарисован выпуклый n-угольник $(n > 4)$. Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ разноцветной, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём хорошей, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

7. (9-10-2019) Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x^1, x^2, \ldots, x^{100}$, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

Разнобой

1. (9-1-2019) Два приведённых квадратных трехчлена $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что каждый из них имеет по два корня, и выполняются равенства $f(1) = g(2)$ и $g(1) = f(2)$. Найдите сумму всех четырёх корней этих трёхчленов

2. (9-6-2019)Даны четыре последовательных натуральных числа, больших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, больших 1.

3. (9-2-2019) На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников?

4. (9-2 год не помню) Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

5. (10-3-2018) Дана клетчатая доска 1000×1000. Фигура гепард из произвольной клетки x бьёт все клетки квадрата 19×19 с центральной клеткой x, за исключением клеток, находящихся с x в одном столбце или одной строке. Какое наибольшее количество гепардов, не бьющих друг друга, можно расставить на доске?

6. (9-9-2019) На доске нарисован выпуклый n-угольник $(n > 4)$. Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ разноцветной, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём хорошей, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

7. (9-10-2019) Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x^1, x^2, \ldots, x^{100}$, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?