Радикальный центр. Точка - это окружность

0. Что является радикальной осью: а) двух точек; б) окружности и точки вне ее; в) окружности и точки на окружности?

0. Что такое радикальный центр трех точек, не лежащих на одной прямой?

1. Пусть AB и AC — касательные к окружности ω, и пусть M, N — середины отрезков AB и AC. Пусть P — произвольная точка на прямой MN. Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная к ω .

2. Дана окружность ω и фиксированная точка A вне окружности. Через точку A проводится окружность ω_1 , которая касается окружности ω в точке A_1 . Касательные к ω_1 в точках A и A_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если рассматривать все такие окружности ω_1 , то получаемые таким образом точки M лежат на одной прямой. (т.е. когда меняется ω_1 , меняется точка A_1 и соответственно изменяется положение точки M).

3. Из точки A, лежащей вне окружности ω проведены касательные AB и AC $(B, C \in \omega)$. Обозначим за E и F — середины отрезков AB и AC соответственно. На прямой EF выбрана произвольная точка D, из которой к ω проводятся касательные DP и DQ $(P, Q \in \omega)$. Прямая PQ пересекает прямую EF в точке M. Докажите, что $\angle DAM = 90^o$.

4. Из точки A к данной окружности S проведены касательные AB и AC. На средней линии треугольника ABC, параллельной стороне BC, выбраны произвольные точки X и Y . Отрезки касательных из точек X и Y к окружности S пересеклись в точке Z. Докажите, что четырёхугольник $AXZY$ — описанный.

5. В треугольнике ABC проведена вписанная окружность с центром I, которая касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно. Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_0 лежит на прямой AC.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая l_A проходит через середины отрезков AB_1AC_1; аналогично определены прямые l_B, l_C . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с центром описанной окружности треугольника, образованного прямыми l_A, l_B, l_C.

7. В треугольнике ABC проведена вписанная окружность с центром I, которая касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно. Прямая, перпендикулярная BB_0 и проходящая через B_0, пересекает A_0C_0 в точке B_1. Докажите, что середина отрезка BB_1 лежит на прямой AC.

Домашнее задание

8. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC, CD = DE, EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.

Радикальный центр. Точка - это окружность

0. Что является радикальной осью: а) двух точек; б) окружности и точки вне ее; в) окружности и точки на окружности?

0. Что такое радикальный центр трех точек, не лежащих на одной прямой?

1. Пусть AB и AC — касательные к окружности ω, и пусть M, N — середины отрезков AB и AC. Пусть P — произвольная точка на прямой MN. Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная к ω .

2. Дана окружность ω и фиксированная точка A вне окружности. Через точку A проводится окружность ω_1 , которая касается окружности ω в точке A_1 . Касательные к ω_1 в точках A и A_1 пересекаются в точке M. Докажите, что если рассматривать все такие окружности ω_1 , то получаемые таким образом точки M лежат на одной прямой. (т.е. когда меняется ω_1 , меняется точка A_1 и соответственно изменяется положение точки M).

3. Из точки A, лежащей вне окружности ω проведены касательные AB и AC $(B, C \in \omega)$. Обозначим за E и F — середины отрезков AB и AC соответственно. На прямой EF выбрана произвольная точка D, из которой к ω проводятся касательные DP и DQ $(P, Q \in \omega)$. Прямая PQ пересекает прямую EF в точке M. Докажите, что $\angle DAM = 90^o$.

4. Из точки A к данной окружности S проведены касательные AB и AC. На средней линии треугольника ABC, параллельной стороне BC, выбраны произвольные точки X и Y . Отрезки касательных из точек X и Y к окружности S пересеклись в точке Z. Докажите, что четырёхугольник $AXZY$ — описанный.

5. В треугольнике ABC проведена вписанная окружность с центром I, которая касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно. Прямая BI пересекает A_0C_0 в точке K. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BKB_0 лежит на прямой AC.

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая l_A проходит через середины отрезков AB_1AC_1; аналогично определены прямые l_B, l_C . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с центром описанной окружности треугольника, образованного прямыми l_A, l_B, l_C.

7. В треугольнике ABC проведена вписанная окружность с центром I, которая касается сторон AB, BC и AC в точках C_0, A_0 и B_0 соответственно. Прямая, перпендикулярная BB_0 и проходящая через B_0, пересекает A_0C_0 в точке B_1. Докажите, что середина отрезка BB_1 лежит на прямой AC.

Домашнее задание

8. Дан шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = BC, CD = DE, EF = FA$, а углы A и C — прямые. Докажите, что прямые FD и BE перпендикулярны.