Степень точки и радикальная ось

Определение. *На плоскости задана окружность ω и точка P.* Степенью $\deg(P,\omega)$ *точки P относительно окружности ω называется величина $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$, где A и B — точки пересечения произвольной прямой ℓ, проходящей через точку P, с окружностью ω. Корректность определения (т. е. независимость от выбора прямой ℓ) следует из задачи* **0**. *В частности, для точки P вне окружности ω величина* $\deg(P,\omega)$ *равна квадрату длины отрезка касательной из точки P к ω (достаточно подставить вместо ℓ касательную к ω). Ясно, что точки внутри окружности обладают отрицательной степенью, точки вне — положительной.*

0. На плоскости заданы окружность ω и точка P внутри или вне неё. Через P проведены две секущие AB и CD $(A, B, C, D \in \omega)$. Докажите, что $\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD}$.

1. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках P и Q, проведена общая касательная AB $(A \in \omega_1$ и $B \in \omega_2)$. Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.

2. **Критерии вписанности четырехугольника**
а) Пусть диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанных тогда и только тогда, когда $AO\cdot OC = BO\cdot OD$.
б) Пусть противоположные стороны четырехугольника AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанных тогда и только тогда, когда $AO\cdot OB = CO\cdot OD$.

3. Через точку P, лежащую на общей хорде AB двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник $KLMN$ вписанный.

4. Через точку S, лежащую вне окружности с центром O, проведены две касательные, касающиеся окружности в точках A и B , и секущая, пересекающая окружность в точках M и N . Прямые AB и SO пересекаются в точке K. Докажите, что точки M, N, K и O лежат на одной окружности.

5. На плоскости даны две неконцентрические окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что геометрическим местом точек, для которых степень относительно ω_1 равна степени относительно ω_2, является прямая, перпендикулярная линии центров этих окружностей. Эту прямую называют радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2.

6. Докажите, что радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

7. Докажите, что середины четырёх отрезков общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

8. В угол вписаны две окружности. Одна окружность касается одной стороны угла в точке A, вторая окружность касается другой стороны угла в точке B. Докажите, что прямая AB высекает на окружностях равные хорды.

9. На окружности ω_1 с диаметром AB взята точка C, из точки C опущен перпендикуляр CH на прямую AB. Докажите, что общая хорда окружности ω_1 и окружности ω_2 с центром C и радиусом CH делит отрезок CH пополам.

10. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P, причём $\angle APB < 90°$. Докажите, что длины отрезков касательных, проведённых из точки P к окружностям, построенным на отрезках AB и CD как на диаметрах, равны.

11. Из точки P вне окружности ω проведена касательная PA к ω $(A \in \omega)$. Хорда BC окружности ω параллельна прямой PA. Прямые PB, PC вторично пересекают ω в точках X и Y. Докажите, что прямая XY делит отрезок PA пополам.

12. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135^o$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности Γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC.

Домашнее задание

13. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность ω проходит через точки A и D и пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q соответственно. Обозначим за X и Y отражения точек P и Q относительно середин отрезков AB и AC соответственно. Докажите, что точки B, C, X, Y лежат на одной окружности.

Радикальная ось и радикальный центр

1. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке. Эту точку называют **радикальным центром** трех окружностей.

2. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

3. а) На двух сторонах треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что радикальная ось этих окружностей есть прямая, содержащая высоту треугольника, проведенную из общей вершины указанных сторон.
б) На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Прямая l проходит через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что прямая l проходит через ортоцентр (точку H пересечения высот треугольника ABC).

4. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB||CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали – в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

5. На сторонах треугольника отмечены по две точки. Оказалось, что любые 4 точки, лежащие на двух сторонах треугольника, лежат на одной окружности. Докажите, что все 6 точек лежат на одной окружности.

6. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка K. Докажите, что общая хорда окружностей с центром C и радиусом CA и с центром K и радиусом KC проходит через середину AB.

7. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке N. BN вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямые HK и BN перпендикулярны.

8. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.

Домашнее задание

9. На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что общие хорды окружностей, построенных на отрезках AA_1, BB_1, CC_1 как на диаметрах, пересекаются в ортоцентре треугольника.

10. Две окружности Ω и ω имеют общий центр O, причём ω внутри Ω. Из точки $A \in \Omega$ проведены касательные AB, AC к ω (B, C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает Ω в точках M и N. Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC.

Радикальная ось и радикальный центр

1. На плоскости даны три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Проведем радикальные оси для каждой пары этих окружностей. Докажите, что все три радикальные оси пересекаются в одной точке. Эту точку называют **радикальным центром** трех окружностей.

2. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

3. а) На двух сторонах треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что радикальная ось этих окружностей есть прямая, содержащая высоту треугольника, проведенную из общей вершины указанных сторон.
б) На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 . Прямая l проходит через общие точки окружностей с диаметрами AA_1 и BB_1. Докажите, что прямая l проходит через ортоцентр (точку H пересечения высот треугольника ABC).

4. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB||CD$). Окружность, проходящая через точки A и B, пересекает боковые стороны трапеции в точках P и Q, а диагонали – в точках M и N. Докажите, что прямые PQ, MN и CD пересекаются в одной точке.

5. На сторонах треугольника отмечены по две точки. Оказалось, что любые 4 точки, лежащие на двух сторонах треугольника, лежат на одной окружности. Докажите, что все 6 точек лежат на одной окружности.

6. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC выбрана произвольная точка K. Докажите, что общая хорда окружностей с центром C и радиусом CA и с центром K и радиусом KC проходит через середину AB.

7. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке N. BN вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K. Докажите, что прямые HK и BN перпендикулярны.

8. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.

Домашнее задание

9. На сторонах BC, CA, AB остроугольного треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что общие хорды окружностей, построенных на отрезках AA_1, BB_1, CC_1 как на диаметрах, пересекаются в ортоцентре треугольника.

10. Две окружности Ω и ω имеют общий центр O, причём ω внутри Ω. Из точки $A \in \Omega$ проведены касательные AB, AC к ω (B, C — точки касания). Окружность с центром A и радиусом AB пересекает Ω в точках M и N. Докажите, что прямая MN содержит среднюю линию треугольника ABC.