Программа зачета за 7-8 классы.

1. Признаки делимости на 2^n,5^n, 9, 11, 7, 13.
2. Даны 19 карточек. Можно ли на каждой из карточек написать ненулевую цифру так, чтобы из этих карточек можно было сложить ровно одно 19-значное число, кратное на 11?
3. Теория информации. Леша загадал одно четное и одно нечетное число от 1 до 10, За какое наименьшее количество вопросов(с вариантами ответов "да" и "нет") Саше гарантированно получится их узнать?
4. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз и ведущий знает где он находится. Зритель может послать ведущего пачку записок с вопросами, требующих ответа да или нет. Ведущий перемешивает записки в пачке и не оглашая вопросов честно отвечает на них. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать где находится приз?
5. Дед мороз со Снегурочкой собираются показать такой фокус. Эльф пишет на доске последовательность из N цифр. Снегурочка закрывает одну цифру черным кружком. Затем входит Дед мороз. Его задача – отгадать закрытую цифру. При каком наименьшем N Дед мороз может договориться со снегурочкой так, чтобы фокус гарантированно удался? (Магией пользоваться запрещено!)
6. Неравенство треугольника. Внутри треугольника ABC периметра P взята точка O. Докажите, что $0.5P < AO+BO+CO < P$
7. Удвоение медианы. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120o$. На сторонах AB и BC взяты такие точки E и F соответственно, что AE = EF = FC. Пусть M — середина AC. Найдите $\angle EMF$.
8. Индукция. 2m-значное число назовём справедливым, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом 2m+ 1-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное 2m-значное число было справедливым.
9. Принцип зацикливания. Принцип зацикливания назад
10. Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из собранного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту же комбинацию еще несколько раз.
11. Докажите, что для любого натурального n, в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов а) имеющих остаток 1 при делении на n б) делящихся на n.
12. Графы. Лемма о рукопожатиях. На столе лежат монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 копеек на сумму 9 рублей 99 копеек. Может ли число соседей каждой монеты быть равно её достоинству? (Монеты – соседи, если они касаются друг друга).
13. Критерий эйлеровости графа
14. Определения дерева. Доказательство эквивалентности.
15. Подвешивание графа. В классе 30 человек, один из них Вася. Каждый из Васиных одноклассников имеет ровно пять общих друзей с Васей. Докажите, что в классе есть ученик с нечётным числом друзей.
16. Формула суммы и разности n степеней. Даны 2000 чисел 11,101,1001, 10001, ... Докажите, что среди этих чисел меньше 20 простых.
17. Средняя линия треугольника. Параллелограмм Вариньона. Пусть K, L, M и N—середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника ABCD. Докажите, что $KM \leqslant (BC+AD)$ 2 причём равенство достигается, только если $BC \parallel AD$
18. Средняя линия трапеции. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC, опущены перпендикуляры BD и CE. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E.
19. Инвариант. В клетчатом квадрате $n \times n$ одна угловая клетка белая, а все остальные — черные. Разрешается взять любую строку или столбец квадрата и поменять в ней цвет каждой клетки. Можно ли такими операциями перекрасить все клетки квадрата в белый, если
   а) n чётно
   б) n нечётно
   в) Пусть $n > 4$, но закрашена не угловая клетка, а соседняя с ней. При этом дополнительно можно перекрашивать любые диагонали (не только главные).

20. Малая теорема Ферма.
21. Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое вида $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.
22. Функция Эйлера. Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
23. Теорема Эйлера.
24. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.
25. Пусть $a > 1$, $(a, b)=1$. Докажите, что найдется такое n, что $1+a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$ делится на b.
26. Теорема Вильсона.
27. Неравенство Коши.
28. На почте Васе дали коробку объемом 1. У него была веревка длины 6. Сможет ли Вася завязать свою коробку для надежности так что веревка будет крест накрест обхватывать всю коробку?
29. Для положительного a докажите, что $a^{10}+\frac{3}{a^2}+\frac{4}{a}\geq 8$.
30. Для положительных a,b,c докажите, что $\frac{3}{2}(a^4+b^4+c^4)+24\geq 4(a^2b+b^2c+c^2a)$
31. Транснеравенство.
32. Дискретная непрерывность. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?
33. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставлены числа -1 и 1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.
34. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.