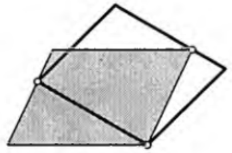
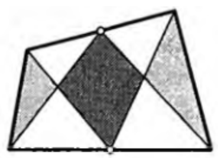
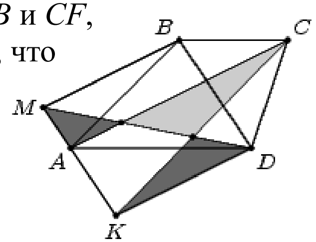
Площади-2.



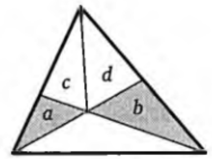
1. Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке. Докажите, что их площади равны.
2. а) Диагонали разбивают четырехугольник на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух треугольников, прилегающих к его противоположным сторонам, равно произведению площадей других двух треугольников.
   б) Диагонали трапеции разбивают ее на четыре треугольника. Площади двух из них, прилегающих к основаниям, равны 1 и 4.
   Найдите площадь трапеции.
3. В трапеции *ABCD* с меньшим основанием *BC* через точку *B* проведена прямая, параллельная *CD* и пересекающая диагональ *AC* в точке *E* . Сравните площади треугольников *ABC* и *DEC*.
4. Точки *M* и *N* – середины противоположных сторон *BC* и *AD* выпуклого четырёхугольника *ABCD*. Диагональ *AC* проходит через середину отрезка *MN*. Докажите, что треугольники *ABC* и *ACD* равновелики.
5. Вершины четырехугольника соединили с серединами его сторон так, как показано на рисунке. Докажите, что площадь закрашенного четырехугольника равна сумме площадей закрашенных треугольников.



6. а)Середину стороны четырехугольника соединили с противоположными вершинами. Оказалось, что полученный треугольник составляет половину его площади. Докажите, что у четырехугольника две стороны параллельны.
   б)Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что две стороны четырехугольника параллельны.
7. Точки *E* и *K* — середины сторон *AD* и *CD* четырехугольника *ABCD*. Отрезок *BK* пересекает диагональ *AC* в точке *O*. Докажите, что площадь треугольника *OBE* в два раза меньше площади треугольника *ABC*.
8. В треугольнике *ABC*, площадь которого равна 20, проведена медиана *CD*. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если известно, что $AC=\sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник *ACD*, лежит на окружности, описанной около треугольника *BCD*.
9. а) В выпуклом шестиугольнике *ABCDEF* отрезки *AB* и *CF*, *CD* и *BE*, *EF* и *AD* попарно параллельны. Докажите, что площади треугольников *ACE* и *BFD* равны.
   б) Трапеция *ABCD* и параллелограмм *MBDK* расположены так, что стороны параллелограмма параллельны диагоналям трапеции (см. рис.).

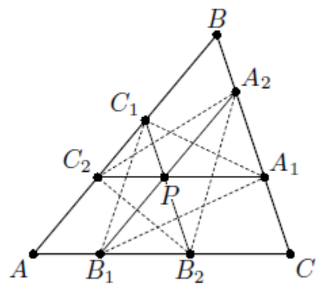


   Докажите, что площадь серой части равна сумме площадей черных частей.
   в) Дан прямоугольный треугольник *ABC* с катетами *AC=3* и *BC=4*. Построим треугольник $A_1B_1C_1$ последовательно переместив *A* на некоторое расстояние параллельно *BC* (точка A_1), затем точку *B* параллельно отрезку A_1C (точка B_1) и, наконец, точку *C* — параллельно отрезку A_1B_1 (точка C_1). Чему равна длина отрезка B_1C_1 , если оказалось, что угол $A_1B_1C_1$ прямой и $A_1B_1=1$?
10. На описанной окружности остроугольного треугольника *ABC* отмечены такие точки *D* и *E*, что *BD* перпендикулярно *AC*, *AE* - диаметр. Докажите, $S_{ABC} = S_{AECD}$.
11. Буквы на рисунке обозначают площади треугольников. Докажите, что, если *a = b,* то *c = d.*



Задачи посложнее

12. Продолжение биссектрисы *AD* остроугольного треугольника *ABC* пересекает описанную окружность в точке *E*. Из точки *D* на стороны *AB* и *AC* опущены перпендикуляры *DP* и *DQ*. Докажите, что $S_{ABC}=S_{APEQ}$.
13. Пусть P является внутренней точкой треугольника ABC, а D, E и F — точки пересечения прямой AP и стороны BC треугольника, прямой BP и стороны CA, прямой CP и стороны AB соответственно. Докажите, что площадь треугольника ABC равна 6, если площадь каждого из треугольников PFA, PDB и PEC равна 1.
14. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного этими перпендикулярами шестиугольника равна половине площади треугольника.
15. Через точку *P* проведены три отрезка, параллельные сторонам треугольника *ABC* (см. рис). Докажите, что площади треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.



16. * На стороне AB треугольника ABC взята точка P, отличная от точек A и B, а на сторонах BC и AC — точки Q и R соответственно так, что четырехугольник PQCR — параллелограмм. Пусть отрезки AQ и PR пересекаются в точке M, а отрезки BR и PQ — в точке N. Докажите, что сумма площадей треугольников AMP и BNP равна площади треугольника CQR.