

Планарные графы.

Определение. Граф называют планарным, если он его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались (во внутренних точках).

Обозначения. Пусть дан граф на плоскости. Тогда V - число вершин, P - число рёбер, а Γ — число граней, т.е. частей, на которые рёбра графа разбивают плоскость.

1. Можно ли расположить на плоскости
 - а) 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?
 - б) 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?
2. а) Докажите формулу Эйлера $V - P + \Gamma = 2$ для дерева
*б) Докажите формулу Эйлера для связного планарного графа $V - P + \Gamma = 2$.
 - в) Чему равно $V - P + \Gamma$ для несвязного планарного графа?
3. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников
4. Докажите, что при $V \geq 3$
 - а) для графа на плоскости $2P \geq 3\Gamma$,
 - б) для связного графа на плоскости $P \leq 3V - 6$,
 - в) последнее неравенство верно для произвольного графа на плоскости.
5. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не планарный.
6. Есть три домика и три колодца. Можно ли соединить каждый домик с каждым колодцем тропинкой так, чтобы тропинки не пересекались?
7. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причём так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.
8. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?
9. а) Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.
б) Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.
10. Всегда ли многогранник является плоским графом?
Домашнее задание
11. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, – не плоский

Планарные графы.

Определение. Граф называют планарным, если он его можно нарисовать на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались (во внутренних точках).

Обозначения. Пусть дан граф на плоскости. Тогда V — число вершин, P — число рёбер, а Γ — число граней, т.е. частей, на которые рёбра графа разбивают плоскость.

1. Можно ли расположить на плоскости
 - а) 4 точки так, чтобы каждая из них была соединена отрезками с тремя другими (без пересечений)?
 - б) 6 точек и соединить их непересекающимися отрезками так, чтобы из каждой точки выходило ровно 4 отрезка?
2. а) Докажите формулу Эйлера $V - P + \Gamma = 2$ для дерева
*б) Докажите формулу Эйлера для связного планарного графа $V - P + \Gamma = 2$.
 - в) Чему равно $V - P + \Gamma$ для несвязного планарного графа?
3. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников
4. Докажите, что при $V \geq 3$
 - а) для графа на плоскости $2P \geq 3\Gamma$,
 - б) для связного графа на плоскости $P \leq 3V - 6$,
 - в) последнее неравенство верно для произвольного графа на плоскости.
5. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не планарный.
6. Есть три домика и три колодца. Можно ли соединить каждый домик с каждым колодцем тропинкой так, чтобы тропинки не пересекались?
7. Семиугольник разбит на выпуклые пяти- и шестиугольники, причём так, что каждая его вершина является вершиной по крайней мере двух многоугольников разбиения. Докажите, что число пятиугольников разбиения не меньше 13.
8. Какое наибольшее число клеток доски 9×9 можно разрезать по обеим диагоналям, чтобы при этом доска не распалась на несколько частей?
9. а) Докажите, что в плоском графе есть вершина, степень которой не превосходит 5.
б) Докажите, что конечная плоская карта допускает раскраску в 6 цветов такую, что соседние страны будут окрашены в разные цвета.
10. Всегда ли многогранник является плоским графом?
Домашнее задание
11. Докажите, что граф, имеющий 10 вершин, степень каждой из которых равна 5, – не плоский