Остовные деревья.

1. Докажите, что из любого связного графа можно удалить одну из вершин так, чтобы связность не нарушилась.

2. В стране 1000 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам.
   а) Докажите, что можно стартовать из некоторого города и пройти по всем городам, проехав не более чем по 1998 дорогам
   б) Не более, чем по 1996 дорогам
   в) Приведите пример, когда меньше чем по 1996 дорогам проехать не получится

3. В связном графе n вершин и $2n$ ребер. Докажите, что из этого графа можно выкинуть все ребра некоторого цикла так, чтобы он остался связным.

4. Дан связный граф G
   а) Может ли в G быть ровно два различных остовных дерева?
   б) В дереве Т есть хотя бы три висячие вершины, докажите, что можно одно ребро стереть и одно добавить так, чтобы получилось дерево, в котором висячих вершин меньше, чем в Т.
   в) Докажите, что если в G есть остовные деревья со 100 и 50 висячими вершинами, то в нем есть остовное дерево с 99 или 98 висячими вершинами.
   г) Докажите, что если в G есть остовные деревья со 100 и 98 висячими вершинами, то в нем есть остовное дерево с 99 висячими вершинами.
   д) Пусть связный граф G имеет остовные деревья с m и n висячими вершинами, $m < n$. Докажите, что для любого натурального k $(m < k < n)$, в G есть остовное дерево ровно с k вершинами.

5. На Луне n городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города А в город В – как стоимость проезда из А в В по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n-1$ различных цен.

6. В стране 1000 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

Домашнее задание

7. Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?

8. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям. Доказать, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно сообщить им какую-либо новость, через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

Остовные деревья.

1. Докажите, что из любого связного графа можно удалить одну из вершин так, чтобы связность не нарушилась.

2. В стране 1000 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам.
   а) Докажите, что можно стартовать из некоторого города и пройти по всем городам, проехав не более чем по 1998 дорогам
   б) Не более, чем по 1996 дорогам
   в) Приведите пример, когда меньше чем по 1996 дорогам проехать не получится

3. В связном графе n вершин и $2n$ ребер. Докажите, что из этого графа можно выкинуть все ребра некоторого цикла так, чтобы он остался связным.

4. Дан связный граф G
   а) Может ли в G быть ровно два различных остовных дерева?
   б) В дереве Т есть хотя бы три висячие вершины, докажите, что можно одно ребро стереть и одно добавить так, чтобы получилось дерево, в котором висячих вершин меньше, чем в Т.
   в) Докажите, что если в G есть остовные деревья со 100 и 50 висячими вершинами, то в нем есть остовное дерево с 99 или 98 висячими вершинами.
   г) Докажите, что если в G есть остовные деревья со 100 и 98 висячими вершинами, то в нем есть остовное дерево с 99 висячими вершинами.
   д) Пусть связный граф G имеет остовные деревья с m и n висячими вершинами, $m < n$. Докажите, что для любого натурального k $(m < k < n)$, в G есть остовное дерево ровно с k вершинами.

5. На Луне n городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города А в город В – как стоимость проезда из А в В по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n-1$ различных цен.

6. В стране 1000 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

Домашнее задание

7. Существует ли граф, у которого есть два остовных дерева без общих ребер?

8. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям. Доказать, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно сообщить им какую-либо новость, через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.