

## Ортоцентр-2.

Листочек посвящен свойствам ортоцентра доказанным в предыдущем листике.

В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник  $ABC$ , его ортоцентр обозначен через  $H$ , центр описанной окружности  $\omega$  — через  $O$ , проведены высоты  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ , а середины сторон  $AB, BC$  и  $CA$  — точки  $C_0, A_0$  и  $B_0$  соответственно,  $R$  — радиус описанной около него окружности.

1. Найдите угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если отрезок  $A_1B_1$  а) равен  $R$ ; б) равен  $\frac{1}{2}R$ .  
в) В каких пределах может меняться отношение  $\frac{A_1B_1}{R}$  ?
2. В параллелограмме  $ABCD$  из вершины тупого угла провели высоты  $AM$  и  $AN$ . Известно, что  $AC = t$  и  $MN = n$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до ортоцентра треугольника  $AMN$ .
3. Ортоцентр отразили относительно середин сторон  $AB, AC, BC$  треугольника  $ABC$  и получили  $C_2, B_2, A_2$  соответственно. Найдите стороны треугольника  $A_2B_2C_2$ , если стороны треугольника  $ABC$  равны 5, 6, 7.
4. Точку  $C_1$  отразили относительно сторон  $AC, BC$  и получили точки  $N, K$  соответственно. Докажите, что точки  $N$  и  $K$  лежат на прямой  $A_1B_1$ .
5. В окружность с центром  $O$  вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки  $O$  до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны.
6. а)  $ABCD$  — вписанный четырехугольник.  $H_C$  и  $H_D$  — ортоцентры треугольников  $ABD$  и  $ABC$ . Докажите, что  $H_C H_D C D$  — параллелограмм.  
б) Пусть дан треугольник  $ABC$ . Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников  $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$  равен треугольнику  $A_1B_1C_1$ .
7. Через точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам  $OA, OB$  и  $OC$ . Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.
8. Точки  $P$  и  $Q$  выбраны так, что  $BOAP$  и  $COPQ$  — параллелограммы. Докажите, что  $Q = H$ .
9. Описанная окружность треугольника  $AB_1C_1$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $K$ , отличной от  $A$ . Докажите, что прямая  $KH$  проходит через  $A_0$ .
10.  $K$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $H$  на касательную к описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведенной в точке  $A$ . Докажите, что треугольник  $AA_0K$  равнобедренный.

### Домашнее задание

11. Докажите, что три прямые, проходящие через вершины  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  и перпендикулярные отрезкам  $B_1C_1, C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.

## Ортоцентр-2.

Листочек посвящен свойствам ортоцентра доказанным в предыдущем листике.

В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник  $ABC$ , его ортоцентр обозначен через  $H$ , центр описанной окружности  $\omega$  — через  $O$ , проведены высоты  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$ , а середины сторон  $AB, BC$  и  $CA$  — точки  $C_0, A_0$  и  $B_0$  соответственно,  $R$  — радиус описанной около него окружности.

1. Найдите угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если отрезок  $A_1B_1$  а) равен  $R$ ; б) равен  $\frac{1}{2}R$ .  
в) В каких пределах может меняться отношение  $\frac{A_1B_1}{R}$  ?
2. В параллелограмме  $ABCD$  из вершины тупого угла провели высоты  $AM$  и  $AN$ . Известно, что  $AC = t$  и  $MN = n$ . Найдите расстояние от точки  $A$  до ортоцентра треугольника  $AMN$ .
3. Ортоцентр отразили относительно середин сторон  $AB, AC, BC$  треугольника  $ABC$  и получили  $C_2, B_2, A_2$  соответственно. Найдите стороны треугольника  $A_2B_2C_2$ , если стороны треугольника  $ABC$  равны 5, 6, 7.
4. Точку  $C_1$  отразили относительно сторон  $AC, BC$  и получили точки  $N, K$  соответственно. Докажите, что точки  $N$  и  $K$  лежат на прямой  $A_1B_1$ .
5. В окружность с центром  $O$  вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки  $O$  до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны.
6. а)  $ABCD$  — вписанный четырехугольник.  $H_C$  и  $H_D$  — ортоцентры треугольников  $ABD$  и  $ABC$ . Докажите, что  $H_C H_D C D$  — параллелограмм.  
б) Пусть дан треугольник  $ABC$ . Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников  $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$  равен треугольнику  $A_1B_1C_1$ .
7. Через точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам  $OA, OB$  и  $OC$ . Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.
8. Точки  $P$  и  $Q$  выбраны так, что  $BOAP$  и  $COPQ$  — параллелограммы. Докажите, что  $Q = H$ .
9. Описанная окружность треугольника  $AB_1C_1$  пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $K$ , отличной от  $A$ . Докажите, что прямая  $KH$  проходит через  $A_0$ .
10.  $K$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $H$  на касательную к описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведенной в точке  $A$ . Докажите, что треугольник  $AA_0K$  равнобедренный.

### Домашнее задание

11. Докажите, что три прямые, проходящие через вершины  $A, B, C$  треугольника  $ABC$  и перпендикулярные отрезкам  $B_1C_1, C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.