

Окружности-4. Угол между хордой и касательной.

- Из конца A диаметра AC окружности опущен перпендикуляр AP на касательную, проведённую через лежащую на окружности точку B , отличную от A и C . Докажите, что AB – биссектриса угла PAC .
- а) Касательная к описанной окружности неравностороннего треугольника ABC , восстановленная в вершине A , пересекает прямую BC в точке S ; точка L – основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.
б) **Лемма Архимеда.** Окружность ω_1 касается хорды MN окружности ω_2 в точке B , а окружности ω_2 в точке A . Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN .
- Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Доказать, что касательные, проведенные к окружностям через концы образовавшихся хорд, параллельны.
- Окружность ω_2 проходит через центр O окружности ω_1 и пересекает ее в точках A и B . Через точку A проведена касательная к окружности ω_2 . Точка D – вторая точка пересечения этой касательной с окружностью ω_1 . Докажите, что $AD = AB$.
- В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB и AC в точках D и E . Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ADE принадлежит первой окружности.
- Биссектрисы углов B и C остроугольного неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q . Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ .
- Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. На «меньших» дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1 ; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.
- Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$; O, I – центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность ω описана вокруг треугольника BIO и пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что AD – касательная к ω .

Домашнее задание

- Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK , параллельна CD .
- К окружности с диаметром AC проведена касательная BC . Отрезок AB пересекает окружность в точке D . Через точку D проведена еще одна касательная к окружности, пересекающая отрезок BC в точке K . В каком отношении точка K разделила отрезок BC ?

Окружности-4. Угол между хордой и касательной.

- Из конца A диаметра AC окружности опущен перпендикуляр AP на касательную, проведённую через лежащую на окружности точку B , отличную от A и C . Докажите, что AB – биссектриса угла PAC .
- а) Касательная к описанной окружности неравностороннего треугольника ABC , восстановленная в вершине A , пересекает прямую BC в точке S ; точка L – основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.
б) **Лемма Архимеда.** Окружность ω_1 касается хорды MN окружности ω_2 в точке B , а окружности ω_2 в точке A . Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN .
- Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Доказать, что касательные, проведенные к окружностям через концы образовавшихся хорд, параллельны.
- Окружность ω_2 проходит через центр O окружности ω_1 и пересекает ее в точках A и B . Через точку A проведена касательная к окружности ω_2 . Точка D – вторая точка пересечения этой касательной с окружностью ω_1 . Докажите, что $AD = AB$.
- В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся сторон AB и AC в точках D и E . Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ADE принадлежит первой окружности.
- Биссектрисы углов B и C остроугольного неравностороннего треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q . Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ .
- Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. На «меньших» дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1 ; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.
- Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$; O, I – центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность ω описана вокруг треугольника BIO и пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что AD – касательная к ω .

Домашнее задание

- Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK , параллельна CD .
- К окружности с диаметром AC проведена касательная BC . Отрезок AB пересекает окружность в точке D . Через точку D проведена еще одна касательная к окружности, пересекающая отрезок BC в точке K . В каком отношении точка K разделила отрезок BC ?